

GÉOMÉTRIE PLANE

Un chapitre de géométrie plane en première S dans lequel nous allons étudier les notions de vecteurs avec la colinéarité de deux vecteurs et les moyens de la vérifier. Egalement, les équations cartésiennes des droites vont être travaillées dans ce chapitre, avec la notion de vecteur directeur. Vous serez, à la fin de ce chapitre, capable de déterminer l'équation cartésienne d'une droite en connaissant son vecteur directeur et un point et inversement.

www.mathsbook.fr

I - COLINÉARITÉ DE DEUX VECTEURS

1 - DÉFINITION ET PROPRIÉTÉ DE LA COLINÉARITÉ

Je ne vous rappelle pas toutes les notions de vecteurs, repérage dans le plan etc, vus l'an passé. On attaque direct la colinéarité.

Cependant, si vous avez besoin de quelques rappels, n'hésitez pas à faire un tour dans le cours sur les vecteurs en seconde.

Bien que nous l'ayons déjà vu l'an dernier, elle est au programme : la notion de colinéarité, celle qui va nous permettre de démontrer l'alignement et le parallélisme.

Définition : Soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaire si et seulement si il existe un réel k tel que :

$$\vec{u} = k\vec{v}$$

Deux vecteurs sont colinéaire s'ils ont la même direction, le même sens, et s'ils sont proportionnels.

Et comment on montre que deux vecteurs sont colinéaires ?

J'allais y venir.

Propriété : Soient les vecteurs $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement si :

$$xy' - yx' = 0$$

Exemple : Les vecteurs $\vec{u}(1; 2)$ et $\vec{v}(2; 4)$ sont colinéaires.

En effet, on remarque que : $\vec{u} = 2\vec{v}$.

Cela se vérifie bien aussi comme ceci :

$$1 \times 4 - 2 \times 2 = 4 - 4 = 0$$

C'est toujours pareil. Si la différence $xy' - yx'$ est nulle, les vecteurs sont colinéaires.

2 - PARALLÉLISME ET ALIGNEMENT

Comme je vous l'ai dit, la colinéarité va nous servir à démontrer le parallélisme, ainsi que l'alignement de points.

Propriétés : Deux propriétés, une sur l'alignement, une sur le parallélisme.

– Soient A , B et C trois points distincts du plan.

Les points A , B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

– Soient deux droites distinctes (AB) et (CD) du plan.

Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

La colinéarité de deux vecteurs signifie en fait que les vecteurs sont parallèles. Si les vecteurs sont colinéaires, alors les droites dont les vecteurs sont directeurs (les droites que dirigent chacun de deux vecteurs) sont parallèles.

Pour démontrer l'alignement ou le parallélisme, il vous suffira de montrer la colinéarité. C'est tout.

Exemple : Soient les points $A(5; 3)$, $B(6; 2)$ et $C(-2; 0)$.
Les points A , B et C sont-ils alignés.

Calculons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et voyons s'ils sont colinéaires. S'ils le sont, les points sont alignés car on a deux vecteurs colinéaires et un point en commun. Sinon, les points ne le sont pas.

$\overrightarrow{AB} = (6 - 5; 2 - 3) = (1; -1)$ et $\overrightarrow{AC} = (-2 - 5; 0 - 3) = (-7; -3)$. Regardons maintenant la colinéarité.

$$1 \times (-3) - (-1) \times (-7) = -3 - 7 = -10 \neq 0$$

Donc, les points A , B et C ne sont pas alignés.

Je ne vous donne pas d'exemple sur le parallélisme, c'est la même chose. Vous calculez les coordonnées des vecteurs qui dirigent les droites dont vous voulez savoir si elles sont parallèles ou non. Si ces deux vecteurs sont colinéaires, les droites sont parallèles, sinon tant pis.

II - EQUATION CARTÉSIENNE DANS LE PLAN

On passe aux équations cartésiennes dans le plan.

Equation cartésienne d'une droite : Soient un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, a, b deux réels dont au moins un et non nul et c un réel.

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, toute droite admet une **équation cartésienne** de la forme :

$$ax + by + c = 0$$

On connaissait l'équation d'une fonction affine rappelez-vous. Bien c'est la même chose, on a juste rassemblé les x et les y ensembles.

Et bien quoi? Oui, une fonction affine, c'est une droite!

Remarque : Une droite parallèle à l'axe des ordonnées s'écrit : $x = k$ avec $k \in \mathbb{R}$

Comment on détermine l'équation cartésienne d'une droite à partir de deux points ?

Suivez bien l'exemple qui suit.

Exemple : Soit $A(3, 4)$ et $B(-1, 2)$ deux points du plan. Déterminons l'équation cartésienne de la droite (AB) .

Cet équation s'écrit : $y = ax + b$.

Oui, c'est une fonction affine en fait.

On a deux points donc deux équations :

$$\begin{cases} y_A &= ax_A + b \\ y_B &= ax_B + b \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} 4 &= 3a + b \\ 2 &= -a + b \end{cases}$$

Que l'on résout aisément, en soustrayant la deuxième équation à la première.

$$\begin{cases} 4 &= a3 + b \\ 2 &= 4a \end{cases}$$

On a donc : $a = \frac{1}{2}$.

Puis :

$$2 = -\frac{1}{2} + b$$

Soit : $b = \frac{5}{2}$.

Donc l'équation de la droite (AB) est :

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

Propriétés : Soit une droite Δ d'équation $ax + by + c = 0$.

- Le vecteur $\vec{u}(-b, a)$ est un **vecteur directeur** de Δ .
- Le vecteur $\vec{n}(a, b)$ est un **vecteur normal** de Δ .

Le vecteur directeur, comme son nom l'indique, dirige la droite. Tandis que le vecteur normal est perpendiculaire à la droite.

Exemple : Trouver l'équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$ passant par le point $A(5, 2)$ et parallèle à la droite $\mathcal{D}'$ d'équation $x - 2y + 3 = 0$.

On sait que le vecteur $\vec{u}(2, 1)$ est directeur à la droite $\mathcal{D}'$.

Soit un point $M(x, y)$ du plan.

Pour que ce point appartienne à la droite $\mathcal{D}$, il faut que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

En langage mathématiques, cela se traduit ainsi :

$$M(x, y) \in \mathcal{D} \iff \overrightarrow{AM} // \vec{u}$$

La notation $\overrightarrow{AM} // \vec{u}$ signifie "colinéaire à". Ne mettez pas cela dans votre copie, c'est uniquement pour que vous compreniez.

$$M(x, y) \in \mathcal{D} \iff \overrightarrow{AM} // \vec{u}$$

$$M(x, y) \in \mathcal{D} \iff a(x - 5) = -b(y - 2)$$

$$M(x, y) \in \mathcal{D} \iff a(x - 5) + b(y - 2) = 0$$

Voilà, nous l'avons notre équation cartésienne.