

LIMITES DE SUITES NUMÉRIQUES

Le chapitre précédent traitait des suites numériques. On avait, en particulier, dit qu'elles avaient des variations tout comme les fonctions. Il est rare de devoir calculer le u_{1000} mais parfois nous voulons savoir sa valeur approchée, vers quoi **tend** la suite au fur et à mesure des n croissants. C'est justement la notion de **limite** que nous allons étudier dans ce chapitre.

Les limites vont être étudiées également pour les fonctions. En attendant, contentez-vous de celles des suites. C'est la même chose, mais en plus simpliste.

Dans ce chapitre, on dira souvent "à partir d'un certain rang". Ne soyez pas effrayer devant ces termes, cela veut simplement dire à partir d'un n assez grand.

www.mathsbook.fr

I - CONVERGENCE ET DIVERGENCE DE SUITES

Que peut faire une suite, au fur et à mesure des n croissants ?

Réponse :

- Soit tendre vers un réel,
- Soit tendre vers l'infini,
- Soit elle ne tend vers rien.

Définitions :

- On dit qu'une suite (u_n) **converge** vers un réel L si pour tout intervalle ouvert U contenant L , tous les termes de la suite appartiennent à U sauf un nombre fini.

On note alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$$

L est la limite de la suite (u_n) et elle est unique.

- Une suite est **divergente** si elle n'est pas convergente.

Explication : Si plus on va dans les n grands, plus la suite se rapproche d'un nombre, que l'on va désigné par le réel L , alors on dira que la suite est **convergente** vers le réel L .

Autrement dit, et en reprenant les termes de la définition, à partir d'un certain rang n , tous les termes de la suites tendent vers le réel L .

Si la suite ne se rapproche d'aucun réels, alors elle est **divergente**.

Mais attention : une suite divergente admet soit une limite infinie, soit aucune limite.

On dira qu'une suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ si tout intervalle ouvert $]a; +\infty[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang p . C'est-à-dire qu'à partir d'un certain nombre, que l'on désigne par a , les termes de la suite tendent vers l'infini.

Exemple : La suite $u_n = \frac{1}{n}$ tend vers 0.

En effet, cela se voit bien quand on calcule les premiers termes de la suite :

$$\begin{aligned}u_1 &= 1 \\u_2 &= \frac{1}{2} = 0,5 \\u_3 &= \frac{1}{3} = 0,33 \\u_4 &= \frac{1}{4} = 0,25 \\u_5 &= \frac{1}{5} = 0,2\end{aligned}$$

On doit calculer tous les termes de la suite pour savoir si elle converge ou pas ?

Non, pas du tout. Il faut tout de même en calculer quelques uns pour avoir une idée de la limite.

Regardez bien mon raisonnement qui peut paraître complexe la première fois.

Tout intervalle qui contient 0 contient également l'intervalle $] - a; a[$ avec $a > 0$, c'est de la pure logique.
Maintenant, si $u_n \in] - a; a[$, alors :

$$u_n \in] - a; a[\Leftrightarrow u_n < a \Leftrightarrow \frac{1}{n} < a \Leftrightarrow n > \frac{1}{a}$$

Donc, tous les termes de la suite u_n sont contenus dans l'intervalle $] - a; a[$ dès que n est supérieur à $\frac{1}{a}$.
Conclusion : la suite (u_n) converge vers 0.

Ne vous inquiétez pas, nous aurons des méthodes bien plus simples et plus rapides pour montrer la convergence ou la divergence d'une suite.

Et pour les suites divergentes ?

Exemple : La suite $u_n = (-1)^n$ est divergente. C'est l'exemple type.

En effet : la suite ne fait que osciller autour de 0 en prenant successivement les valeurs 1 et (-1) .

Une dernière propriété, très simple en plus.

Propriété : Une suite (u_n) converge vers L revient à dire que la suite $(u_n - L)$ converge vers 0.

Remarque : Les expressions "la suite tend vers" et "la suite a pour limite" sont équivalentes.

II - THÉORÈMES DE COMPARAISON

Nous allons attaquer les **théorèmes de comparaison** qui vont nous aider à montrer la convergence ou la divergence d'une suite.

Cette partie est très importante, concentrez-vous bien.

Dans les théorèmes que je vais vous énoncer, il y a beaucoup de conditions pré-requises. Si une d'entre elles manquent, le théorème ne peut être appliqué.

1 - THÉORÈME DES GENDARMES

On débute par le critère de comparaison, appelé le **théorème des gendarmes**, vous comprendrez pourquoi.

Théorème des gendarmes : Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites numériques telles que (u_n) et (w_n) convergent vers L .

Si $u_n \leq v_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang, alors la suite (v_n) converge vers L .

Une conséquence immédiate de ce résultat est le suivant :

Si à partir d'un certain rang on a $|u_n - L| \leq v_n$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$, alors la suite (u_n) converge vers L .

Je vais vous appliquer ce théorème très puissant sur un exemple afin que vous saisissiez absolument tout.

Exemple : La limite de $\frac{\cos n}{n}$ est 0.

En effet : on sait que :

$$-1 \leq \cos n \leq 1$$

C'est la propriété fondamentale de trigonométrie. Si par malheur vous ne la connaissiez pas, je vous aurais arraché la tête !
Continuons...

On va diviser par n tous les membres de l'inégalité.

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\cos n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

On a donc trois suites : $u_n = -\frac{1}{n}$, $v_n = \frac{\cos n}{n}$ et $w_n = \frac{1}{n}$. Or,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0\end{aligned}$$

On a toutes les conditions pour appliquer le théorème des gendarme.

Conclusion, la suite $\frac{\cos n}{n}$ converge vers 0.

2 - CRITÈRE DE DIVERGENCE

La divergence à présent.

Critère de divergence : Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.

- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$,
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Cela se comprend assez bien.

Si la limite de la suite u_n est $+\infty$ et que la suite v_n est plus grande que la suite u_n , alors la limite de v_n sera plus grande que celle de u_n . Plus grand que $+\infty$ cela ne peut être que $+\infty$.

Si la limite de la suite v_n est $-\infty$ et que la suite u_n est plus petite que la suite v_n , alors la limite de u_n sera plus petite que celle de v_n . Plus petit que $-\infty$ cela ne peut être que $-\infty$.

Exemple : La suite $u_n = (3 + (-1)^n)n^2$ diverge vers $+\infty$.

En effet, on a :

$$3 + (-1)^n \geq 2$$

On multiplie l'inégalité par n^2 (positif, donc ne change aucun signe),

$$(3 + (-1)^n)n^2 \geq 2n^2$$

Or :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n^2 = +\infty$$

Donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (3 + (-1)^n)n^2 = +\infty$$

III - OPÉRATIONS ALGÈBRIQUES

Quelques opérations algébriques sur les suites et leurs limites.

Propriétés : Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques convergentes de limites respectives L et L' .

- La suite $(u_n + v_n)$ est convergente et sa limite est égale à $L + L'$,
- La suite $(u_n v_n)$ est convergente et sa limite est égale à LL' ,
- Si $L' \neq 0$, la suite $\frac{u_n}{v_n}$ est convergente et sa limite est égale à $\frac{L}{L'}$,

Ces opérations sont très simples. Gagnons du temps et ne donnons pas d'exemple.

IV - LIMITES DE SUITES ET DE FONCTIONS

Nous allons étudier le cas où la suite u_n est définie explicitement à l'aide d'une fonction f .

Propriétés : Soient f une fonction définie sur $]a; +\infty[$ et $(u_n) = f(n)$ une suite définie à partir de $n > a$.

Si f admet en $+\infty$ une limite finie, ou infinie, alors la suite (u_n) admet la même limite.

C'est logique, vu que la suite est définie par une fonction.
On a juste remplacé le x de la fonction par le n de la suite.

Exemple : La suite $u_n = 3 + \frac{1}{2n}$ a pour limite 3.

En effet : soit f la fonction $f(x) = 3 + \frac{1}{2x}$.

On a $u_n = f(n)$.

Or,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 + \frac{1}{2x} = 3$$

Oui, car $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 = 3$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = 0$. Par addition, on a le résultat que l'on voulait. Donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3 + \frac{1}{2n} = 3$$

Remarque : On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = 0$ car plus le x est grand (plus il tend vers l'infini), plus la fraction sera petite (plus elle va tendre vers 0).

V - CAS DES SUITES GÉOMÉTRIQUES

Heureusement, les suites géométriques sont plus simples à étudier.

Théorème : Soit $q \in \mathbb{R} - \{0; 1\}$ (un réel non nul et différent de 1).

- Si $-1 < q < 1$, alors la suite (q^n) converge vers 0,
- Si $q > 1$, alors la suite (q^n) diverge vers $+\infty$,
- Si $q = 1$, alors la suite (q^n) converge vers 1,
- Si $q \leq -1$, alors la suite (q^n) n'a pas de limite.

Ce théorème est très explicite. Pas besoin donc de donner un exemple.

Voilà, nous avons fini sur les suites pour cette année !