

PRODUIT SCALAIRE

Le produit scalaire est un outils très puissant utilisé sur des vecteurs. Il permet notamment de montrer que deux vecteurs sont perpendiculaire.

Il est très souvent utilisé en physique.

Le but de ce chapitre est de vous familiariser avec celui-ci. On y va.

www.mathsbook.fr

I - DÉFINITIONS

Je vais vous définir tout d'abord cette nouvelle notion.

Définition : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est un **réel**, que l'on note $\vec{u} \cdot \vec{v}$, défini par :

– Si $\vec{u} \neq 0$ et $\vec{v} \neq 0$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

– Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont nuls :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

La notation $\|\vec{u}\|$ signifie la norme du vecteur $\vec{u}$.

En réalité, ce n'est que le produit de la norme de $\vec{u}$ et de la norme de $\vec{v}$ que l'on multiplie par le cosinus de l'angle formé par ces deux vecteurs.

Si les deux vecteurs sont nuls, bien sûr leurs normes sont nulles, et donc leur produit scalaire aussi.

Remarque : On peut faire le produit scalaire avec un seul vecteur : $\vec{u} \cdot \vec{u}$ se note $\vec{u}^2$ et est appelé **carré scalaire**.

Exemple : Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ avec :

$\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 4$ et l'angle formé par ces deux vecteurs vaut $\frac{\pi}{6}$ soit 30° .

Calculons le produit scalaire de ces deux vecteurs.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) = 3 \times 4 \times \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

Or, $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, tout le monde le sait.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 4 \times \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2}$$

Le produit scalaire, comme je vous l'ai dit en introduction, permet de démontrer l'orthogonalité de deux vecteurs.

Définition : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Cela se voit très bien regardez.

Démonstration : Si le produit scalaire est nul, c'est soit que la norme de $\vec{u}$ est nulle, soit que celle de $\vec{v}$ est nulle, soit que le cosinus de l'angle formé par ces deux vecteurs est nul.

Or, si les normes des deux vecteurs étaient nulles, les vecteurs seraient forcément nul.

Donc, cela ne peut qu'être le cosinus qui soit nul.

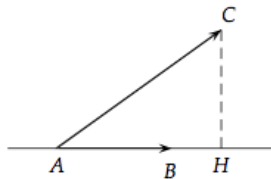
$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \iff (\vec{u}, \vec{v}) = \pm \frac{\pi}{2}$$

Mais un angle de $\frac{\pi}{2}$, c'est un angle droit !

Terminé.

Quand on fait le produit scalaire de deux vecteurs, c'est en fait une projection orthogonale de l'un sur l'autre.

Propriété : Soient A , B et C trois points distincts du plan, et H le projeté orthogonal de C sur (AB) .



– Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$$

– Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens opposés :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$$

Tout est très clair, je n'ai rien à ajouter là dessus.

Passons à présent aux propriétés relatives au produit scalaire.

II - PROPRIÉTÉS DU PRODUIT SCALAIRE

Elles sont nombreuses, et doivent toutes être comprises et connues par coeur.

Propriété : Soient $\vec{u}$ de coordonnées (x, y) et $\vec{v}$ de coordonnées (x', y') dans la base orthonormale $(\vec{i}, \vec{j})$.
Alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

On additionne les produits des coordonnées deux à deux.

Exemple : Soient deux vecteurs $\vec{u}(3, -4)$ et $\vec{v}(0, 3)$.

Alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 0 + (-4) \times 3 = -12$$

Exercice : Calculer le produit scalaire des vecteurs suivants :

1. $\vec{u}(5, -2)$ et $\vec{v}(-3, 3)$,
2. $\vec{u}(-1, 0)$ et $\vec{v}(4, -2)$,
3. $\vec{u}(\sqrt{4}, -3)$ et $\vec{v}(\frac{3}{2}, -5)$,

Et maintenant, avec un réel.

Propriétés : Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan et λ un réel.

On a les relations suivantes :

– Commutativité du produit scalaire :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

– Distribution :

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

– Multiplication par un réel :

$$\vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

Tout cela paraissait évident, non ?

Alors continuons avec ces évidences.

Identités remarquables : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

On a les relations suivantes :

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

$$(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

Ce ne sont que des vulgaires identités remarquables. Rien de plus, rien de moins.

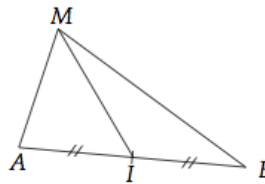
Allez maintenant, appliquons tout cela !

III - APPLICATIONS

Plusieurs théorèmes célèbres sont issus de ce produit scalaire. Et oui, on ne fait rien qui ne sert à rien !

1 - THÉORÈME DE LA MÉDIANE

Théorème de la médiane : Soient A et B deux points distincts du plan et I le milieu de $[AB]$.



Pour tout point M du plan, on a les relations suivantes :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$

$$MA^2 - MB^2 = 2\vec{MI} \cdot \vec{BA}$$

$$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = MI^2 - IA^2$$

Exemple : Calculer la longueur de la médiane du triangle ABM issue de M tel que $AB = 4$, $AM = 3$ et $BM = 7$.

Rien de plus simple, on applique tout bêtement.

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$

$$2MI^2 = MA^2 + MB^2 - \frac{1}{2}AB^2$$

$$2MI^2 = 3^2 + 7^2 - \frac{1}{2} \times 4^2 = 9 + 49 - \frac{1}{2} \times 16 = 58 - 8 = 50$$

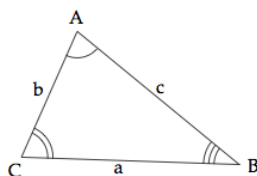
$$MI^2 = 25$$

$$MI = \sqrt{25} = 5$$

2 - THORÈME D'AL KASHI

Vous connaissiez Pythagore en 4ème, mais son théorème n'est qu'un cas particulier de celui d'Al Kashi que je vais vous montrer tout de suite.

Théorème D'Al Kashi : Soit un triangle ABC avec $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$.



On a les relations suivantes :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\widehat{A})$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos(\widehat{B})$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\widehat{C})$$

Rappelez-vous, pour appliquer le théorème de Pythagore, il nous faut un triangle rectangle, soit un angle droit, un angle de $\frac{\pi}{2}$.

Et le cosinus d'un angle droit vous combien ? Il est nul.

Donc, si l'angle droit est en A , les formules se transforment en :

$$a^2 = b^2 + c^2$$

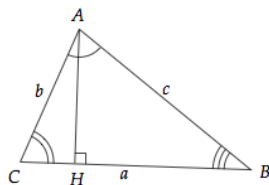
C'est le théorème de notre cher Pythagore, oui.

Grâce à ce théorème, en particulier, vous saurez calculer tous les angles d'un triangle en ayant juste la longueur de ces côtés. Tiens ! Faites-le.

3 - FORMULE DES SINUS

Après les cosinus, les sinus ! Le produit scalaire nous donne des propriétés sur les sinus.

Formule des sinus : Soit un triangle ABC d'aire $\mathcal{A}$ avec $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$.



On a les relations suivantes :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}bc \sin \widehat{A} = \frac{1}{2}ca \sin \widehat{B} = \frac{1}{2}ab \sin \widehat{C}$$

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} = \frac{abc}{2\mathcal{A}}$$

Une nouvelle façon de calculer l'aire d'un triangle sans utiliser la base et la hauteur.

Exemple : Soit un triangle ABC construit comme dans la définition précédente, avec $BC = a = 12$, $\widehat{A} = 30^\circ$ et $\widehat{B} = 60^\circ$. Calculer le côté $[AC]$.

Pour trouver b , on utilise la relation :

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}}$$

$$b = \frac{a \times \sin \widehat{B}}{\sin \widehat{A}}$$

Or,

$$\sin \widehat{B} = \sin(60^\circ) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \widehat{A} = \sin(30^\circ) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

Donc :

$$b = \frac{a \times \sin \widehat{B}}{\sin \widehat{A}} = \frac{12 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 12\sqrt{3}$$

4 - EQUATIONS

Deux propriétés sur les équations et l'on aura terminé pour ce chapitre.

Propriété équations :

– La droite orthogonale à $\vec{n}$ passant par A est :

$$\{M \in \mathcal{P}, \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0\}$$

– Le cercle de diamètre $[AB]$ est :

$$\{M \in \mathcal{P}, \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0\}$$

Le premier ensemble fait référence à la définition du produit scalaire suivante : si le produit scalaire de deux vecteurs est nul alors ces vecteurs sont orthogonaux.

La seconde fait référence à un triangle dans un cercle dont l'un des côtés est diamètre de ce cercle, ce triangle est forcément rectangle. Et bien ici, si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont orthogonaux, cela signifie que le segment $[AB]$ est diamètre d'un cercle.