

FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

Ce chapitre va lister toutes les fonctions que vous devez connaître par coeur.
Inutile donc de vous rappeler que ce chapitre est à apprendre sur le bout des doigts.

www.mathsbook.fr

I - PARITÉ

On distingue des fonctions paires et des fonctions impaires.

Définition : Soit une fonction f définie sur un domaine D .

La fonction f est **paire** si pour tout éléments x de D , $f(-x) = f(x)$ (avec $-x$).

Sa courbe représentative admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

Définition : Soit une fonction f définie sur un domaine D .

La fonction f est **impaire** si pour tout éléments x de D , $f(-x) = -f(x)$. (avec $-x$)

Sa courbe représentative admet l'origine du repère comme centre de symétrie.

Attention : Si une fonction n'est pas paire, elle n'est pas forcément impaire (et inversement). Une fonction peut être ni paire ni impaire.

Exemples : Voici un exemple de chaque.

- La fonction $f(x) = x^2 - 1$ est paire.
En effet : $f(-x) = (-x)^2 - 1 = x^2 - 1 = f(x)$ car un carré est toujours positif.
- La fonction $f(x) = \frac{2x^2+3}{x}$ est impaire.
En effet : $f(-x) = \frac{2(-x)^2+3}{-x} = \frac{2x^2+3}{-x} = -\frac{2x^2+3}{x} = -f(x)$.
- La fonction $f(x) = x^2 + 2x - 1$ n'est ni paire ni impaire.
En effet : $f(-x) = (-x)^2 + 2(-x) - 1 = x^2 - 2x - 1 \neq \pm f(x)$.

II - FONCTION AFFINE

Je sais que vous savez ce qu'est une fonction affine. Certes. Cela dit, je rabâche.

Définition : Une **fonction affine** est une fonction de la forme $f(x) = ax + b$ avec a et b deux réels fixés.

Si $b = 0$, alors la fonction $f(x) = ax$ est une **fonction linéaire**.

La courbe représentative d'une fonction affine est une droite.

La courbe représentative d'une fonction linéaire est une droite qui passe par l'origine du repère.

a est le **coefficient directeur** de la droite et b son **ordonnée à l'origine**.

Si $a < 0$, alors la fonction est décroissante et si $a > 0$, alors la fonction est croissante.

Exemple : La fonction $f(x) = 3x - 1$ est une fonction affine de coefficient directeur égal à 3 et d'ordonnée à l'origine égal à (-1) .

Or, $3 > 0$. Donc la fonction f est croissante.

Pour la représenter, on trace un tableau de valeurs. Vous savez faire.

Remarque pratique : Pour tracer une fonction affine $f(x) = ax + b$, il suffit de placer le point de coordonnées $(0; b)$,

puis de se déplacer de une unité vers la droite puis de a unité vers le haut si $a > 0$ ou vers le bas si $a < 0$.
C'est très pratique.

Remarque/Exemple : Si on vous demande de retrouver une fonction affine f tel que $f(1) = 0$ et $f(2) = 4$:

On revient, encore et toujours, à la définition. On sait qu'une fonction affine est de la forme $f(x) = ax + b$, on cherche le a et le b .

Or, $f(1) = 0$ et $f(2) = 4$. Donc :

$$a \times 1 + b = 0$$

$$a \times 2 + b = 4$$

On résout donc le système suivant :

$$\begin{cases} a + b = 0(L1) \\ 2a + b = 4(L2) \end{cases}$$

On va faire $L1 - L2$.

$$-a = -4$$

$$a = 4$$

On trouve ensuite b :

$$a + b = 0$$

$$a = -b$$

$$b = -4$$

Donc, le couple de solution de ce système est $(4; -4)$,

$$\begin{cases} a = 4 \\ b = -4 \end{cases}$$

Et donc la fonction recherchée est :

$$f : x \mapsto 4x - 4$$

Je vous laisse vérifier.

III - FONCTION CARRÉE

Nous allons à présent étudier la **fonction carrée**. C'est très simple. Retenez-la par coeur.

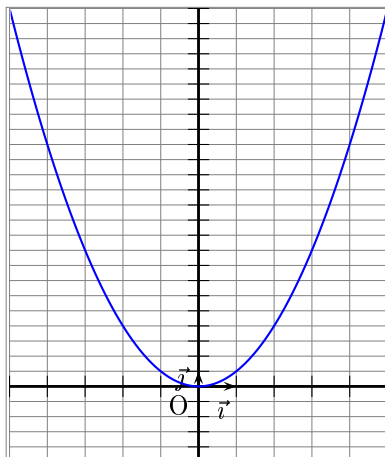
Définition : La **fonction carrée** est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

La fonction carrée est une fonction paire. Donc, symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Elle est décroissante sur $] -\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$.

La courbe représentative de la fonction carrée est une **parabole**.

Voici sa représentation graphique :



Mais pourquoi il faut connaître cette fonction par coeur ?

Cette fonction va nous aider à étudier beaucoup d'autres fonctions possédant un carré. Regardez bien le point méthode qui suit.

Point méthode : Pour étudier les variations d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+a)^2 + b$, vous avez deux façons de faire :

- On détermine successivement les variations des fonctions $x \mapsto x+a$ et $x \mapsto (x+a)^2$, puis on dresse le tableau de variation sachant que les variations de $f(x) = (x+a)^2$ sont les mêmes que celles de $f(x) = (x+a)^2 + b$.
- On montre que la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction $f(x) = (x+a)^2 + b$ se déduit de la courbe représentative $\mathcal{P}$ de la fonction carrée par translation de vecteur $\vec{v}(-a; b)$.

Exemple : Etudier les variations de la fonction $f(x) = (x+1)^2 - 2$ par les deux méthodes précédentes.

– Première méthode :

La fonction $x \mapsto x+1$ est strictement croissante et positive sur $[-1; +\infty[$ et strictement croissante et négative sur $] -\infty; -1]$.

La fonction $x \mapsto (x+1)^2$ est strictement croissante sur $[-1; +\infty[$ et strictement décroissante sur $] -\infty; -1]$ car c'est une fonction carré.

Donc : la fonction f est strictement croissante sur $[-1; +\infty[$ et strictement décroissante sur $] -\infty; -1]$.

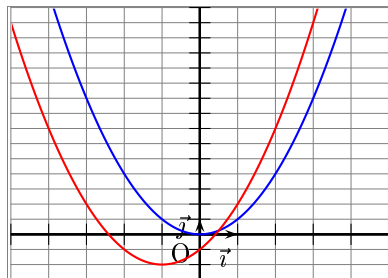
– Seconde méthode :

Soit un point $M(x; y)$ appartenant à la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f si et seulement si $y = (x+1)^2 - 2 \Leftrightarrow y+2 = (x+1)^2$.

Donc le point de coordonnées $(x+1; y+2)$ appartient à la courbe $\mathcal{P}$ représentative de la fonction carrée.

On passe donc de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{P}$ par une translation de vecteur $\vec{v}(1; 2)$ et de $\mathcal{P}$ à $\mathcal{C}$ par une translation de vecteur $\vec{w}(-1; -2) = -\vec{v}$.

D'où la construction de $\mathcal{C}$ suivante :



La fonction f est donc strictement croissante sur $[-1; +\infty[$ et strictement décroissante sur $] -\infty; -1]$.

IV - FONCTION INVERSE

Et maintenant, étudions la **fonction inverse**.

Définition : La **fonction inverse** est la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$ (appelé aussi $\mathbb{R}^+$) par $f(x) = \frac{1}{x}$.

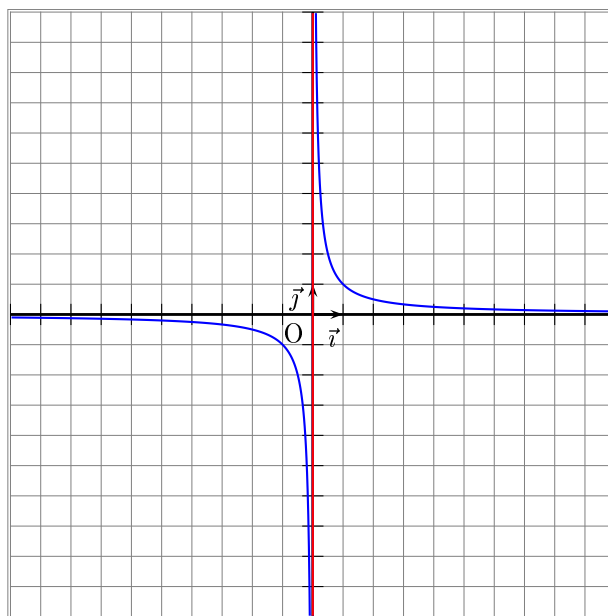
La fonction inverse est une fonction impaire. Donc, son centre de symétrie est l'origine du repère.

Elle est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et décroissante sur $\mathbb{R}^-$.

La courbe représentative de la fonction carrée est une **hyperbole**.

Elle possède une **asymptote verticale** en $x = 0$ et une **asymptote horizontale** d'équation $y = 0$. En effet, 0 est une valeur interdite (donc asymptote verticale), et elle ne peut pas être nulle (donc asymptote horizontale).

Voici sa représentation graphique :



Cette fonction aussi nous aide à l'étude d'autres fonctions du même type ?

Oui, regardez.

Point méthode : Pour étudier les variations d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{x+a} + b$, vous avez deux façons de faire :

- On détermine successivement les fonctions des fonctions $x \mapsto x+a$ et $x \mapsto \frac{1}{x+a}$, puis on dresse le tableau de variation sachant que les variations de $f(x) = \frac{1}{x+a}$ sont les mêmes que celles de $f(x) = \frac{1}{x+a} + b$.
- On montre que la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction $f(x) = \frac{1}{x+a} + b$ se déduit de la courbe représentative $\mathcal{P}$ de la fonction inverse par translation de vecteur $\vec{v}(-a; b)$.

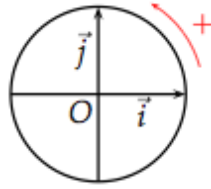
Je ne donne pas d'exemple pour cette partie là. C'est exactement de la même façon que pour la section précédente.

V - FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

Cette fois-ci, une grande concentration est demandée car les **fonction trigonométriques** sont ULTRA IMPORTANTES en mathématiques.

Nous allons d'abord introduire quelques notions, avant de les étudier.

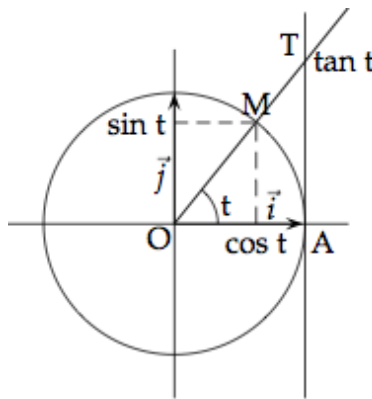
Définition : Soit un repère orthonormal $(O; I; J)$. On appelle **cercle trigonométrique** le cercle de centre O , de rayon 1, orienté dans le **sens positif** (ou **sens direct**).



Remarque : Attention, le sens positif est le sens contraire au aiguilles d'une montre. Ne me demandez pas pourquoi, c'est une convention mathématiques.

Définitions : Soit un repère orthonormal $(O; I; J)$.

On appelle **cosinus de x** , noté $\cos x$, l'abscisse du point M appartenant au cercle trigonométrique, et **sinus de x** , noté $\sin x$, l'ordonnée de ce point M .

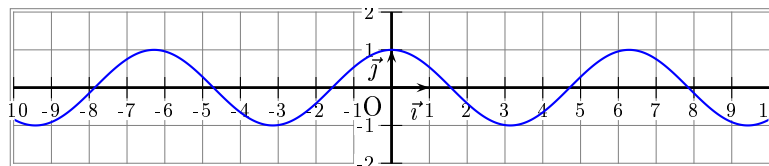


Mais ce ne sont pas des fonctions si elles sont sur un cercle ? Je n'ai pas compris.

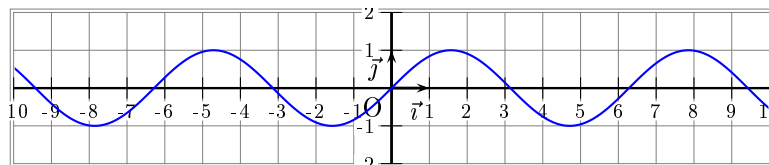
Si, ce sont des fonctions que l'on représente sur un cercle. Je vous les présente dans un "vrai" repère tout de suite.

Définitions :

- La **fonction cosinus** est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos x$.
C'est une fonction paire et **périodique** de période 2π , c'est-à-dire qu'elle se répète tous les 2π .
Elle est croissante sur $[-\pi; 0]$ et décroissante sur $[0; \pi]$.
La courbe représentative de la fonction cosinus est une **sinusoïde**.



- La **fonction sinus** est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x$.
C'est une fonction impaire et **périodique** de période 2π .
Elle est croissante sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ et décroissante sur $[\frac{\pi}{2}; \pi]$.
La courbe représentative de la fonction sinus est une **sinusoïde**.



Il existe un tas de propriétés pour ces deux fonctions *sin* et *cos*. En voici quelques-unes.

Propriétés : Voici les deux principales propriétés des fonctions cosinus et sinus.

- Pour tout réel x : $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$.
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- Parité : $\cos(-x) = \cos(x)$ (fonction paire) et $\sin(-x) = -\sin(x)$ (fonction impaire).

Remarque : Quand on dit " π ", " $\frac{\pi}{2}$ ", etc. on parle de **radians**. Sachez que 2π radians vaut 360° .

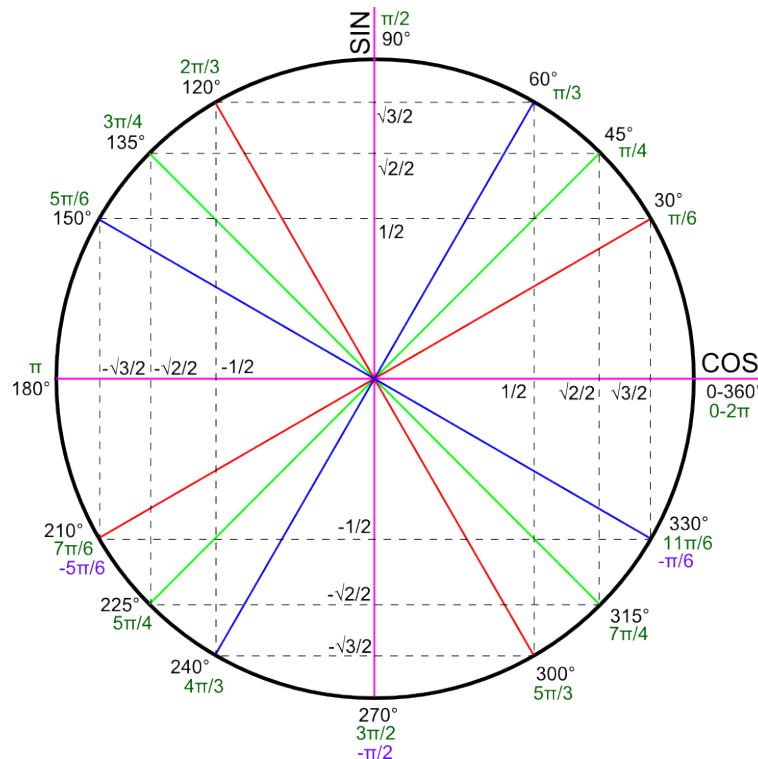
Exemple : 60° vaut $\frac{\pi}{3}$ radians.

En effet, par le produit en croix :

$$\frac{60 \times 2\pi}{360} = \frac{60}{180}\pi = \frac{\pi}{3}$$

Il y a des valeurs à connaître par coeur, comme par exemple : $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Voici la suite.

Degrés	0	30	45	60	90	120	135	150	180
Radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
Sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
Cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1



Et comment je fais pour les autres angles ?

Vous vous servirez des propriétés de parités ou autres pour les déterminer. Ou utilisez la remarque suivante.

Remarque importante : Pour donner la valeur principale d'un angle, on décomposera sous la forme $\theta + 2k\pi$, avec θ appelée mesure principale de l'angle.

Exemple 1 :

Donner la valeur de $\cos(\frac{27\pi}{6})$.

On décompose le $\frac{27\pi}{6}$ comme ceci :

$$\cos(\frac{27\pi}{6}) = \cos(\frac{(6 \times 4 + 3)\pi}{6}) = \cos(\frac{(6 \times 4)\pi}{6} + \frac{3\pi}{6}) = 4\pi + \frac{\pi}{2}$$

Or, $\cos(4\pi) = 0$.

Donc :

$$\cos(\frac{27\pi}{6}) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$$

Exemple 2 :

Sachant que x est dans une premier quart du cercle trigonométrique, et que $\cos x = \frac{2}{3}$, calculer $\sin x$.

On sait que, pour tout x , $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, donc :

$$\sin^2 x = 1 - (\frac{2}{3})^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

Donc :

$$\sin x = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$$

Or, x se trouve dans le premier quart du cercle trigonométrique, là où le sinus est positif. Donc :

$$\sin x = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

Avec la calculatrice, on trouve une valeur approchée de x à 10^{-3} près de : $x = 0,841$ rad.