

# ORDRE DES NOMBRES ET VALEUR ABSOLUE

Comparer deux nombres signifie trouver celui qui est le plus grand. Dans ce chapitre, nous allons vous donner quelques propriétés pour vous faciliter cette tâche.

[www.mathsbook.fr](http://www.mathsbook.fr)

## I - COMPARAISON DE NOMBRES

Vous vous en doutez, nous allons comparer des nombres dans cette section. Je donnerai des exemples à tout ça à la fin de la section.

### 1 - COMPARAISON ET OPÉRATIONS

Premièrement, quelques propriétés sur les opérations de comparaison.

**Propriétés** : Soient  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , avec  $a < b$ .

- Ajouter, ou soustraire, aux deux membres d'une l'inégalité un nombre  $c$  conserve l'ordre :

$$\text{Si } a \leq b, \text{ alors } a + c \leq b + c$$

- Multiplier, ou diviser, chaque membre d'une l'inégalité un nombre  $c > 0$  conserve l'ordre :

$$\text{Si } a \leq b, \text{ alors } ac \leq bc$$

- Multiplier, ou diviser, chaque membre d'une l'inégalité un nombre  $c < 0$  inverse l'ordre :

$$\text{Si } a \leq b, \text{ alors } ac \geq bc$$

### 2 - COMPARAISON DE FRACTIONS

Maintenant, je vais vous donner les propriétés pour comparer deux nombres en écriture fractionnaire.

**Propriétés** : Soient  $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ .

- $\frac{a}{c}$  et  $\frac{b}{c}$ , avec  $c \neq 0$ , sont rangés dans le même ordre que  $a$  et  $b$ .
- $\frac{c}{a}$  et  $\frac{c}{b}$ , avec  $(a; b) \neq (0; 0)$ , sont rangés dans l'ordre inverse de  $a$  et  $b$ .

### 3 - COMPARAISON À UN NOMBRE INTERMÉDIAIRE

Et si l'on ajoute un nombre intermédiaire ?

**Propriétés** : Soient  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

$$\text{Si } a < b \text{ et } b < c, \text{ alors } a < c.$$

### 4 - SIGNE DE LA DIFFÉRENCE

**Remarque** : Parfois, pour comparer deux nombres, il est préférable d'étudier le signe de la différence. Je m'explique.

Soit  $a, b \in \mathbb{R}$ .

- Si  $a - b < 0$ , alors  $a < b$ .
- Si  $a - b > 0$ , alors  $a > b$ .

Vous avez donc maintenant toutes les notions essentielles pour comparer deux nombres.

Exemples : Voici trois exemples qui résume tout.

1.  $1,001 < \frac{1}{0,999}$

En effet : la calculatrice nous donne le résultat. Oui, parfois il sera préférable d'utiliser cette merveille de la technologie.

2.  $\frac{55}{56} < 1$

En effet : on a le dénominateur supérieur au numérateur :  $56 > 55$ . Donc la fraction est inférieure à 1.

3.  $1 + \sqrt{2} > \frac{1}{1 - \sqrt{2}}$

En effet : on calcule la différence,

$$1 + \sqrt{2} - \frac{1}{1 - \sqrt{2}} = \frac{(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) - 1}{1 - \sqrt{2}} = \frac{1 - 2 - 1}{1 - \sqrt{2}} = -\frac{2}{1 - \sqrt{2}}$$

Or,  $1 - \sqrt{2} < 0$ . Donc :

$$-\frac{2}{1 - \sqrt{2}} > 0$$

D'où le résultat.

## 5 - COMPARAISON DE PUISSANCES

Un dernier point sur ces comparaisons est celui de comparer des puissances.

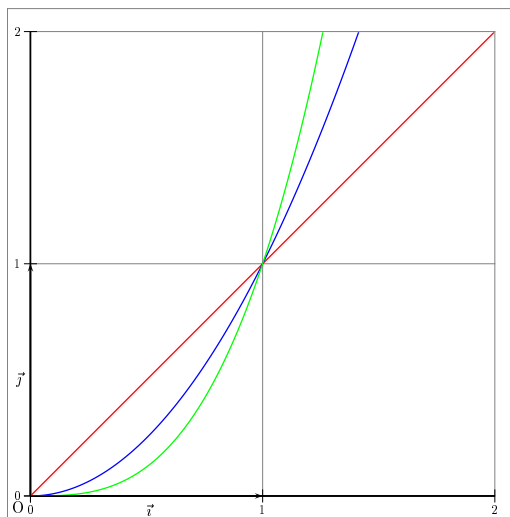
**Propriétés** : Soit  $a \in \mathbb{R}$ .

- Si  $a > 1$ , alors  $a^3 > a^2 > a$ .

- Si  $0 < a < 1$ , alors  $a^3 < a^2 < a$ .

*Qu'es-ce que cela veut dire concrètement ?*

Interprétation graphique : Voici les trois courbes, en rouge la droite d'équation  $y = x$ , en bleu la droite d'équation  $y = x^2$  et en vert  $y = x^3$ . Vous comprendrez sans difficultés.



## II - ENCADREMENTS

Toutes les propriétés de comparaison vont nous aider pour établir celles d'encadrement.

*Mais c'est quoi un encadrement ?*

**Définition** : Encadrer un nombre  $x$ , c'est trouver deux nombres  $a$  et  $b$  tels que  $a < x < b$ .

*Ah d'accord. Et comment on encadre un nombre ?*

**Propriétés** : Soient  $a, a', b, b', x, x' \in \mathbb{R}$ .

- Pour encadrer une somme de deux réels, on additionnera les bornes de leurs encadrement :

$$\text{Si } a < x < b \text{ et } a' < x' < b', \text{ alors } a + a' < x + x' < b + b'$$

- Pour encadrer une différence de deux réels, on ramènera le problème au cas de l'addition :

Si  $a < x < b$  et  $a' < x' < b'$ , alors  $-b' < -x' < -a'$  (on a multiplié par  $(-1)$  la seconde inégalité en changeant les signes), et donc  $a - b' < x - x' < b - a'$

- Pour encadrer un produit de réels, on multipliera les bornes de l'encadrement **si et seulement si les nombres sont positifs** :

$$\text{Si } 0 < a < x < b \text{ et } 0 < a' < x' < b', \text{ alors } 0 < aa' < xx' < bb'$$

- Pour encadrer l'inverse d'un réels, on inversera les bornes de l'encadrement **si et seulement si les bornes sont de même signe** :

$$\text{Si } 0 < a < x < b, \text{ alors } \frac{1}{b} < \frac{1}{x} < \frac{1}{a}$$

Faites bien attention à ce qui est en gras et souligné. C'est la cause principale d'erreur.

**Remarques** : Il peut arriver que les bornes ne soient pas de même signes. Dans ce cas là, il faudra distinguer les cas.

Exemple : Sachant que  $1 < \sqrt{2} < 2$  et que  $2 < \sqrt{5} < 3$ , on peut en déduire que :

1.  $1 + 2 = 3 < \sqrt{2} + \sqrt{5} < 5 = 2 + 3$

2.  $2 < \sqrt{5} < 3 \Leftrightarrow -3 < -\sqrt{5} < -2$ , donc :  $1 + (-3) = -2 < \sqrt{2} - \sqrt{5} < 0 = 2 + (-2)$

3.  $1 \times 2 = 2 < \sqrt{5} \times 2 = \sqrt{10} < 6 = 2 \times 3$

4.  $\frac{1}{1} = 1 > \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{2}$  et  $\frac{1}{2} > \frac{1}{\sqrt{5}} > \frac{1}{3}$

### III - INTERVALLES DE $\mathbb{R}$

Vous avez déjà rencontré la notion **d'intervalle** dans votre scolarité, j'en conviens. Je donne quand même une vraie définition.

**Définition** : Soient  $a$  et  $b$  deux réels de  $\mathbb{R}$  tels que  $a < b$ .

$[a; b]$  est appelé **intervalle fermé** de  $\mathbb{R}$  et  $]a; b[$  **l'intervalle ouvert**.

$a$  et  $b$  sont les **bornes** de l'intervalle et la distance  $b - a$  est **l'amplitude** de l'intervalle.

En fait, quand on a un crochet  $[$  à gauche, l'intervalle est fermé et donc la borne est incluse et quand on a un  $]$  à gauche l'intervalle est ouvert, la borne est exclue. Inversement pour le crochet de droite.

Les signes  $<$  et  $>$  impliquent un intervalle ouvert, alors que les signes  $\leq$  et  $\geq$  impliquent un intervalle fermé.

**Remarque** : On peut avoir une réunion d'intervalles. Dans ce cas, on note ça :  $[a; b] \cup ]c; d[$ . Le " $U$ " signifie "union".

**Attention** : Après un symbole infini  $\infty$ , on met TOUJOURS un crochet ouvert.

### IV - VALEUR ABSOLUE

#### 1 - DÉFINITION

Voilà une notion nouvelle que je vais vous définir.

**Définition** : Soit une droite graduée d'origine  $O$  et un point  $M$  d'abscisse  $x$ .

On appelle **valeur absolue** de  $x$ , que l'on note  $|x|$ , sa distance à l'origine, soit la distance  $OM$ .

Or, une distance est toujours positive. Donc :

**Propriété** : Une valeur absolue est toujours positive :

$$|x| \geq 0$$

*Comment on calcule une valeur absolue ?*

Il suffit de connaître son signe :

$$- |a - b| = a - b \text{ si } a > b,$$

$$- |a - b| = -(a - b) = b - a \text{ si } a < b.$$

*Y a-t-il une relation entre la distance entre deux points et les valeurs absolues ?*

Oui, oui, oui !

**Propriété** : Soient une droite graduée d'origine  $O$  et deux points  $A(a)$  et  $B(b)$ .

La distance entre les points  $A$  et  $B$  est :

$$AB = |a - b| = |b - a|$$

On fait : le plus grand moins le plus petit.

**Exemple** : Soient les points  $A(3)$  et  $B(-2)$ . Calculer  $AB$ .

$AB = |3 - (-2)| = |3 + 2| = |5| = 5$  car  $3 > (-2)$ . Terminé.

## 2 - INTERVALLES

On va rejoindre les notions d'intervalle et de valeur absolue.

**Propriété** : Soit  $a \in \mathbb{R}$  et  $r \in \mathbb{R}^+$ .

Si on a  $|x - a| \leq r$ , alors  $x \in [a - r; a + r]$ .

Ces notions sont importantes pour la résolution d'équations et d'inéquations avec des valeurs absolues.

*Comment ça se résout ça ?*

**Point méthode** :

- Equations :  $|x + a| = b \Leftrightarrow x + a = b$  **OU**  $x + a = -b$ .
- Inéquations supérieurs (ou égal) :  $|x + a| > b \Leftrightarrow x + a > b$  **ET**  $x + a < -b$ .
- Inéquations inférieurs (ou égal) :  $|x + a| < b \Leftrightarrow -b < x + a < b$ .

Que se soit les signes  $<$  ou  $\leq$  et  $>$  ou  $\geq$ , c'est la même chose.

Regardez les exemples qui suivent, ils expliquent tous les calculs sur la résolution d'équations et d'inéquations faisant intervenir des valeurs absolues.

Exemples :

1. Résoudre l'équation  $|x + 2| = 4$ .  
On a donc :  $x + 2 = 4$  **OU**  $x + 2 = -4$ .  
On a plus qu'à résoudre et on trouve :  $x = 2$  ou  $x = -6$ .
2. Résoudre l'inéquation  $|x - 1| > 2$ .  
On a donc :  $x - 1 > 2$  **ET**  $x - 1 < -2$ .  
On résout :  $x > 3$  et  $x < -1$ .  
Donc :  $x \in ]-1; 3[ \cup ]3; +\infty[$ .  
On met des intervalles ouvert car on a des strictement positifs ( $>$ ) et strictement négatifs ( $<$ ).
3. Résoudre l'inéquation  $|3 - x| \leq 2$ . On a donc :  $-2 \leq 3 - x \leq 2$ .  
Mais on ne veut encadrer que le  $x$ . On soustrait  $(-3)$  à toute l'inégalité :  $-5 \leq -x \leq -1$ .  
On multiplie tout par  $(-1)$  en faisant attention de changer les signes et on a :  $1 \leq x \leq 5$ . Donc :  $x \in [1; 5]$ .  
Cette fois ci, on met des intervalles fermé car on a les signes  $\leq$ .