

ARITHMÉTIQUE

Dans ce chapitre, nous n'utiliserons que des nombres entiers positifs.

www.mathsbook.fr

I - DIVISIBILITÉ

Vous avez certainement déjà entendu cette notion de divisibilité quand vous avez étudié les fractions. Cela dit, nous redéfinissons tout dans ce chapitre.

Définition : a est divisible par d si la division de a par d donne un quotient entier exact.
Dans ce cas, a est un multiple de d et d est un diviseur de a .

Exemple : Le nombre 42 est divisible par 7 car $\frac{42}{7} = 6$.

Voici les critères de divisibilité.

Critères de divisibilité :

- **Divisibilité par 2** : Un nombre est divisible par 2 si son dernier chiffre est 0, 2, 4, 6 ou 8.
Exemple : 876 904 est divisible par 2 car il se termine par un 4.
- **Divisibilité par 3** : Un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est elle-même divisible par 3.
Exemple : 375 est divisible par 3 car $3 + 7 + 5 = 15$ et 15 est dans la table de 3.
- **Divisibilité par 4** : Un nombre est divisible par 4 si le nombre constitué de ses deux derniers chiffres est lui-même divisible par 4.
Exemple : 1 000 990 188 est divisible par 4 car 88 est divisible par 4.
- **Divisibilité par 5** : Un nombre est divisible par 5 si son dernier chiffre est 0 ou 5.
Exemple : 23 465 est divisible par 5 car son dernier chiffre est 5.
- **Divisibilité par 6** : Un nombre est divisible par 6 si il est à la fois divisible par 2 et par 3, c'est-à-dire si c'est un nombre pair dont la somme des chiffres est elle-même divisible par 3.
Exemple : 1572 est divisible par 6 car c'est un nombre pair et $1 + 5 + 7 + 2 = 15$ et 15 est divisible par 3.
- **Divisibilité par 9** : Un nombre est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est elle-même divisible par 9.
Exemple : 621 est divisible par 9 car $6 + 2 + 1 = 9$.
- **Divisibilité par 10** : Un nombre est divisible par 10 si son dernier chiffre est 0
Exemple : 45 567 320 est divisible par 10.

II - DIVISEURS COMMUNS

1 - DÉFINITIONS

Définissons d'abord la notion de P.G.C.D. (Plus Grand Commun Diviseur).

Définition : On dit que d est un diviseur commun de deux nombres a et b s'il divise à la fois a et b .
Le plus grand diviseur commun de ces deux nombres s'appelle de P.G.C.D..

Remarque : Le nombre 1 est toujours un diviseur commun de deux nombres. Lorsque c'est l'unique diviseur commun, on dit que ces deux nombres sont **premiers entre eux**.

Exemple : Quelles sont les diviseurs communs de 12 et 20 ?

On écrit tous les diviseurs de 20 : 1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 10 et 20.

On écrit tous les diviseurs de 12 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 et 12.

Les nombres 12 et 20 ont donc trois diviseurs communs : 1 ; 2 et 4.

Le P.G.C.D. de ces deux nombre est : $\text{PGCD}(12; 20) = 4$.

*Donc pour savoir si deux nombres ont des diviseurs commun, on doit faire la liste de tous leurs diviseurs ?
Et si ce nombre faire 12 chiffres ?*

Non, ne vous inquiétez pas, il y a une méthode plus simple pour cela. Je vous l'explique tout de suite !

2 - CALCUL DU P.G.C.D.

Il existe deux méthodes pour le calcul du P.G.C.D.. Je vous conseille d'utiliser la deuxième. Cependant, je vais vous donner les deux.

La méthode de calcul de P.G.C.D. repose sur le principe suivant :

Le P.G.C.D. de deux nombres est le même que le P.G.C.D. d'un des deux nombres et de leur différence.

Prenons un exemple de calcul de P.G.C.D..

Exemple : Quel est le P.G.C.D. de 20 et 12 ?

Le P.G.C.D. de 20 et 12 est le même que le P.G.C.D. de 12 (le plus petit des deux nombres) et de 8 ($20 - 12 = 8$) :

$$\text{PGCD}(20; 12) = \text{PGCD}(12; 8)$$

Et on continu ainsi.

Le P.G.C.D. de 12 et 8 est le même que le P.G.C.D. de 8 (le plus petit des deux nombres) et de 4 ($12 - 8 = 4$) :

$$\text{PGCD}(12; 8) = \text{PGCD}(8; 4)$$

Puis :

$$\text{PGCD}(8; 4) = \text{PGCD}(4; 4) = 4$$

Donc le PGCD de 20 et 12 est 4.

La seconde méthode de calcul du P.G.C.D. est la **méthode d'Euclide**. Elle utilise les divisions Euclidiennes.

Exemple : Quel est le P.G.C.D. de 702 et 494 ?

$$\text{PGCD}(702; 494) = \text{PGCD}(494; 208)$$

Ici, on prend le plus petit nombre et le reste de la division de 702 par 494.

On continue.

$$\text{PGCD}(494; 208) = \text{PGCD}(208; 78) = \text{PGCD}(78; 52) = \text{PGCD}(52; 26) = \text{PGCD}(26; 0) = 26$$

Remarque : Le P.G.C.D. peut être utilisé lorsque l'on veut rendre une fraction irréductible. En effet, il suffit de trouver le P.G.C.D. du numérateur et du dénominateur puis à simplifier la fraction par lui.

3 - RÉOLUTION DE PROBLÈMES

Et à quoi il peut bien servir ce P.G.C.D. ?

A résoudre des problèmes de la vie courante ! Si si, je vous assure. regardez plutôt.

Exemple :

Marc a 108 billes rouges et 135 billes noires. Il veut faire des paquets de manière à ce que :

- Tous les paquets contiennent le même nombre de billes rouges,
- Tous les paquets contiennent le même nombre de billes noires,
- Toutes les billes rouges et les billes noires sont utilisées.

Quel nombre maximal de paquets pourra-t-il réaliser ?

Imaginons que Marc commence par partager séparément les billes rouges et les billes noires.

Il utilise toutes les billes rouges donc le nombre de paquets de billes rouges est un diviseur de 108.

Il utilise toutes les billes noires donc le nombre de paquets de billes noires est un diviseur de 135.

Comme il doit assembler les paquets de billes rouges et noires, le nombre de paquets de billes rouges et de billes noires doit être identique.

Par conséquent ce nombre de paquets est un diviseur commun à 108 et 135.

Et en plus, Marc veut un maximum de paquets. Il doit partager les billes en :

$$\text{PGCD}(108;135)=27 \text{ paquets.}$$

Voilà. Vous pouvez faire une pause à présent. Allez jouer aux billes !