

# FONCTIONS LINÉAIRES ET AFFINES

Nous nous attaquons désormais à une notions plus que FONDAMENTALE en mathématiques : les **fonctions**. Dans ce chapitre, nous allons en aborder deux types : les fonctions linéaires et les fonctions affines. Ne perdez pas le fil un seul instant. Accrochez-vous !

[www.mathsbook.fr](http://www.mathsbook.fr)

## I - NOTION DE FONCTION

### 1 - DÉFINITION

Commençons par définir la notion de fonction.

**Définition** : Une **fonction** est une formule comportant une seule lettre, généralement  $x$ . C'est une formule, donc on peut calculer ses valeurs en donnant une valeur à ce  $x$  appelé **variable**.

Expliquons-nous à travers un exemple simple.

Exemple : La formule mathématiques qui donne l'aire d'un carré est  $\mathcal{A} = x \times x = x^2$ , avec  $x$  la longueur du côté du carré.

La fonction qui donne l'aire d'un carré s'écrira de la manière suivante :  $f(x) = x^2$ .

Le " $f(x)$ " se lit " $f$  de  $x$ ", et signifie " $f$  est fonction de  $x$ ", c'est-à-dire que l'orque la valeur de  $x$  change, la valeur de  $f$  change aussi.

Regardez, pour  $x = 2$  :

$$f(x = 2) = f(2) = 2^2 = 4$$

Ce résultat signifie que quand le côté d'un carré ( $x$ ) est égal à 2, son aire vaut 4.

Notez bien ces définitions :

On dit que par la fonction  $f$ , **l'image** de 2 est 4 et que **l'antécédent** de 4 est 2.

En gros :  $f(x)$  est appelé l'image de  $x$ , et  $x$  lui même est l'antécédent de  $f(x)$ .

**Remarque** : Ces deux notions sont fondamentale. Elles doivent être bien maîtrisées.

**Autre notation** : On peut représenter la fonction  $f$  comme ceci :

$$f : x \mapsto x^2$$

On dit que : la fonction  $f$  est la fonction qui à  $x$  associe  $x^2$ .

### 2 - RÉPRÉSENTATION GRAPHIQUE

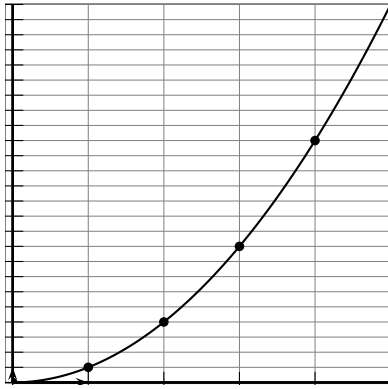
Reprenons la fonction précédente  $f(x) = x^2$  et calculons  $f$  pour plusieurs valeurs de  $x$ .

|        |   |   |   |   |    |
|--------|---|---|---|---|----|
| $x$    | 0 | 1 | 2 | 3 | 4  |
| $f(x)$ | 0 | 1 | 4 | 9 | 16 |

Jusque là, tout va bien, on a juste remplacé  $x$  par les valeurs du tableau.

*Et on en fait quoi maintenant de toutes ces valeurs qu'on a calculé ?*

On va pouvoir, grâce à elles, tracer la fonction  $f$ . Voici donc la **représentation graphique** de la fonction  $f$  :



On a juste placé les points correspondants à  $(x; f(x))$  sur un repère.

**Remarques** : Vous remarquerez que l'on a pris une unité bien plus petite pour l'axe des ordonnées (axe vertical) que pour celui des abscisses (axe horizontal) dans le but de pouvoir bien tracer les points de la fonction, sinon elle serait sorti de la feuille. On a tout-à-fait le droit de faire ça.

De plus, vous pouvez voir que après le point  $(4; 16)$ , la courbe continue. Oui, elle ne doit pas s'arrêter, surtout pas !

## II - FONCTION LINÉAIRE

Je vais vous présenter la notion de **fonction linéaire**, elle est très simple mais doit être bien comprise pour la suite du cours quand on abordera sa cousine, la **fonction affine**.

**Définition** : Une **fonction linéaire** est une fonction de la forme :

$$f(x) = ax$$

Avec  $a$  une valeur numérique fixée.

**Remarque** : En fait, une fonction linéaire marque une relation de proportionnalité.

Exemple : La fonction  $f : x \mapsto 3x$  est une fonction linéaire.

Allez, étudions une fonction linéaire avec calcul d'image, d'antécédent et représentation graphique.

Exemple : Soit la fonction  $f(x) = 5x$ .

Calcul de l'image : on remplace simplement  $x$  par les valeurs que l'on veut.

$f(-1) = -5$ ;  $f(0) = 0$ ;  $f(1) = 5$ ;  $f(2) = 10$  et  $f(3) = 15$ . On dit que l'image de  $(-1)$  par  $f$  est  $(-5)$ , que l'image de  $0$  par  $f$  est  $0$ , etc. On pourrait continuer ainsi, mais nous n'avons pas que cela à faire !

Calcul de l'antécédent : cherchons par exemple l'antécédent de  $3$  par la fonction  $f$ .

On cherche donc  $x$  (oui,  $x$  est l'antécédent), tel que  $f(x) = 3$ .

*Et comment on fait ?*

Simple équation. On résout ceci :

$$5x = 3$$

Et on trouve :

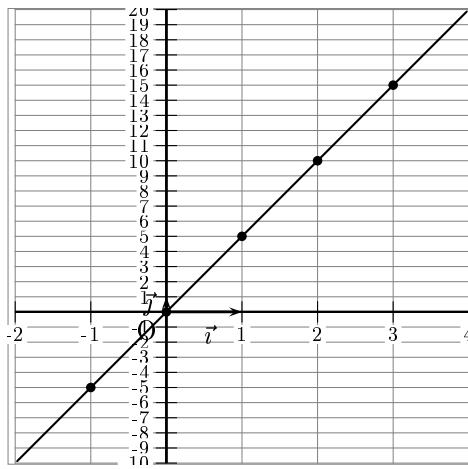
$$x = \frac{3}{5}$$

Donc, l'antécédent de  $3$  par  $f$  est  $\frac{3}{5}$ .

Représentation graphique : à l'aide des images calculées tout-à-l'heure, on construit le tableau suivant :

|        |    |   |   |    |    |
|--------|----|---|---|----|----|
| $x$    | -1 | 0 | 1 | 2  | 3  |
| $f(x)$ | -5 | 0 | 5 | 10 | 15 |

On trace enfin la fonction  $f$ , et puis voilà.



**Remarque/Exemple** : Si on vous demande de retrouver une fonction linéaire  $g$  (Eh oui, toutes les fonctions ne s'appellent pas  $f$ , on peut les appeler comme on veut) tel que  $g(2) = 6$ , voilà comment procéder :  
On revient à la définition. On sait qu'une fonction linéaire est de la forme  $f(x) = ax$ , on cherche le  $a$ .  
Or,  $g(2) = 6$ . Donc :

$$g(2) = 2 \times a = 6$$

On résout et on trouve :

$$a = 3$$

Et en effet, l'antécédent de 2 par la fonction  $g(x) = 3x$  est bien 6.

### III - FONCTION AFFINE

Maintenant la cousine !

**Définition** : Une **fonction affine** est une fonction de la forme :

$$f(x) = ax + b$$

Avec  $a$  et  $b$  deux valeurs numériques fixées.

On procède de la même façon que pour les fonction linéaires, avec un exemple complet.

Exemple : Soit la fonction  $f(x) = 2x + 1$ .

Calcul de l'image : comme précédemment, on remplace  $x$  par les valeurs que l'on veut.

$f(-2) = -3$  ;  $f(-1) = -1$  ;  $f(0) = 1$  ;  $f(1) = 3$  et  $f(2) = 5$ . L'image de  $(-2)$  par  $f$  est  $(-3)$ , que l'image de 0 par  $f$  est 1, etc.

Calcul de l'antécédent : cherchons par exemple l'antécédent de 2 par la fonction  $f$ .

On cherche donc  $x$ , tel que  $f(x) = 2$ .

On résout :

$$2x + 1 = 2$$

$$2x = 1$$

Et on trouve :

$$x = \frac{1}{2}$$

Donc, l'antécédent de 2 par  $f$  est  $\frac{1}{2}$ .

Représentation graphique : à l'aide des images que l'on vient de calculées, on construit le tableau suivant :

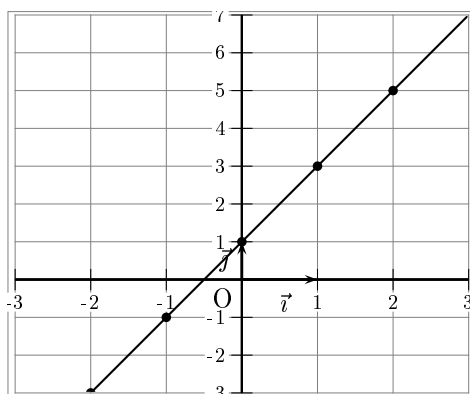
|        |    |    |   |   |   |
|--------|----|----|---|---|---|
| $x$    | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| $f(x)$ | -3 | -1 | 1 | 3 | 5 |

On dit que l'on trace la droite d'équation :  $y = 2x + 1$ .

Cette droite passe par le point de coordonnées  $(0; f(0))$ .

$f(0)$  se lit directement sur la fonction :  $f(0) = 1$ . Nous reviendrons à la fin de ce cours sur cette notion.

Représentation graphique de la fonction  $f$  :



**Remarque/Exemple** : Si on vous demande de retrouver une fonction affine  $f$  tel que  $f(1) = 0$  et  $f(2) = 4$  :

On revient, encore et toujours, à la définition. On sait qu'une fonction affine est de la forme  $f(x) = ax + b$ , on cherche le  $a$  et le  $b$ .

*Mais on ne sait pas résoudre une équation avec deux inconnues ? !*

Non, c'est vrai. En tous les cas, il y aurait une infinité de solutions. Mais qui vous parle d'une équation ? C'est un système que l'on va résoudre cette fois.

Or,  $f(1) = 0$  et  $f(2) = 4$ . Donc :

$$a \times 1 + b = 0$$

$$a \times 2 + b = 4$$

On résout donc le système suivant :

$$\begin{cases} a + b = 0 (L1) \\ 2a + b = 4 (L2) \end{cases}$$

On va faire  $L1 - L2$ .

$$-a = -4$$

$$a = 4$$

On trouve ensuite  $b$  :

$$a + b = 0$$

$$a = -b$$

$$b = -4$$

Donc, le couple de solution de ce système est  $(4; -4)$ ,

$$\begin{cases} a = 4 \\ b = -4 \end{cases}$$

Et donc la fonction recherchée est :

$$f : x \mapsto 4x - 4$$

Je vous laisse vérifier.

Je vous avais dit que je reviendrais sur une notion importante. Je me suis trompé en disant qu'elle était importante. Elle est ULTRA IMPORTANTE. La voici.

**Définition** : Soit une fonction affine  $f(x) = ax + b$ . Sa droite d'équation est :  $y = ax + b$ .

$a$  s'appelle **le coefficient directeur** de la droite et  $b$  s'appelle **l'ordonnée à l'origine** de la droite.

Le coefficient directeur se traduit aisément sur une droite. Quand la droite avance d'un pas vers la droite, elle monte de  $a$  pas vers le haut (si  $a$  est positif) ou vers le bas (si  $a$  est négatif).

L'ordonnée à l'origine traduit le point de coordonnées  $(0; f(0))$ , avec  $f(0) = b$ .