

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

Je vous ai énoncé la notion de vecteurs dans les chapitres précédents. Maintenant, nous allons travailler avec.

www.mathsbook.fr

I - REPÉRAGE DANS LE PLAN

Quelques petits rappels pour commencer.

Définitions : On utilise un **repère** pour repérer un point dans le plan.

Un repère est défini par trois points non alignés, généralement O , I et J :

- O est l'**origine** du repère,
- La droite (OI) est l'**axe des abscisses**,
- La droite (OJ) est l'**axe des ordonnées**,
- La longueur OI définit l'**unité** sur l'axe des abscisses,
- La longueur OJ définit l'**unité** sur l'axe des ordonnées,

Il existe plusieurs types de repères. Un repère peut avoir ses axes perpendiculaires ou non, de même longueur ou non.

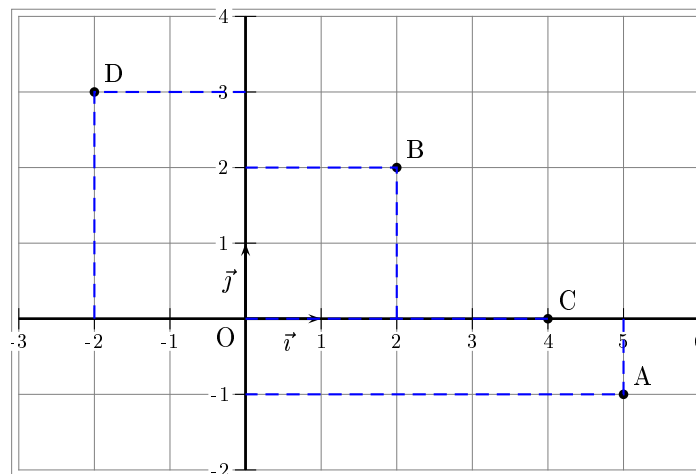
Définitions : Plusieurs repères à connaître.

- Lorsque les axes d'un repère sont perpendiculaires, le repère est **orthogonal**.
- Lorsque les axes d'un repère sont perpendiculaires et les unités identiques, le repère est **orthonormal** ou **orthonormé**.

On parle de repère pour y placer des points.

Définition : Les coordonnées d'un point dans un repère sont constituées de deux nombres : une **abscisse** et une **ordonnée**.
Si le point A a pour coordonnées 3 en abscisse et 2 en ordonnée, on note : $A(3; 2)$.

Exemple : Dans ce repère, on a placé les points $A(5, -1)$, $B(2; 2)$, $C(4; 0)$ et $D(-2; 3)$.



II - SEGMENT

1 - COORDONNÉES DU MILIEU D'UN SEGMENT

Dans un repère, si on place deux points, A et B , on peut former le segment $[AB]$.
Nous allons nous occuper ici de calculer les coordonnées de son milieu.

Propriété : Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$. On note I le milieu du segment $[AB]$.

Les coordonnées de I sont :

$$\begin{cases} x_I &= \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_I &= \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$$

Exemple : Soient les points $A(1; 3)$ et $B(5; 1)$. Calculons les coordonnées du point I , milieu du segment $[AB]$.

On applique la formule précédente :

$$\begin{cases} x_I &= \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ y_I &= \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

Donc, les coordonnées de I sont : $I(3; 2)$.

2 - LONGUEUR D'UN SEGMENT

Nous allons nous préoccuper à présent de calculer la longueur d'un segment dans un repère orthonormal.

Propriété : Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.

Alors :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Exemple : Soient les points $A(5; 7)$ et $B(-1; 3)$. Calculons la longueur du segment $[AB]$.

On applique la formule précédente :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-1 - 5)^2 + (3 - 7)^2} = \sqrt{(-6)^2 + (-4)^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52} = \sqrt{13 \times 4} = 2\sqrt{13}$$

III - VECTEURS

1 - DÉFINITION

On va parler dans cette section de vecteurs dans un repère. Commençons par une définition.

Définition : Soit un vecteur $\vec{u}$.

Lorsque l'on construit l'image de l'origine O du repère par la translation de vecteur $\vec{u}$, on obtient un point, que nous appellerons A , qui a les mêmes coordonnées que le vecteur $\vec{u}$.

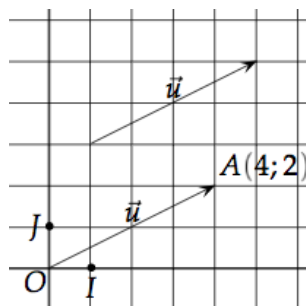
On note : $\vec{u}(x_{\vec{u}}; y_{\vec{u}})$.

Je vous donne un exemple.

Exemple : Soient deux vecteurs $\vec{u}(4; 2)$ et $\vec{v}(-2; -3)$.

Cela signifie que le vecteur $\vec{u}$ fait 4 pas à droite et 2 pas en haut et le vecteurs $\vec{v}$ fait 2 pas à gauche et 3 pas en bas.

Regardez le graphique suivant, on a représenté le vecteur $\vec{u}$ et construit l'image de l'origine O du repère par la translation de vecteur $\vec{u}$.



Cela nous donne le point A de même coordonnées que le vecteur $\vec{u}$: $A(4; 2)$.

Remarque : Pour construire l'image du point B quelconque par la translation de vecteur $\vec{u}(6; -2)$, on va partir du point B et monter de 2 pas vers le bas et aller 6 pas vers la droite.

2 - VECTEUR DÉFINI PAR DEUX POINTS

Je vais vous apprendre à calculer les coordonnées d'un vecteur à partir de deux points : son point de départ et son point d'arrivée.

Propriété : Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :

$$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$$

Exemple : Calculons les coordonnées du vecteur formé par les points $A(4; 6)$ et $B(-1; 2)$.

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A) = (-1 - 4; 2 - 6) = (-5; -4)$$

3 - SOMME DE DEUX VECTEURS

On peut également sommer deux vecteurs.

Propriété : Soient $\overrightarrow{u}(x_{\overrightarrow{u}}; y_{\overrightarrow{u}})$ et $\overrightarrow{v}(x_{\overrightarrow{v}}; y_{\overrightarrow{v}})$.

Les coordonnées de la somme des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est :

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (x_{\overrightarrow{u}} + x_{\overrightarrow{v}}; y_{\overrightarrow{u}} + y_{\overrightarrow{v}})$$

Exemple : Calculons les coordonnées de la somme des vecteurs $\overrightarrow{u}(4; -2)$ et $\overrightarrow{v}(0; 3)$.

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (x_{\overrightarrow{u}} + x_{\overrightarrow{v}}; y_{\overrightarrow{u}} + y_{\overrightarrow{v}}) = (4 + 0; -2 + 3) = (4; 1)$$

4 - VECTEURS OPPOSÉS

On redéfinit le vecteur opposé au sens des coordonnées.

Définition : Soit $\overrightarrow{u}(x_{\overrightarrow{u}}; y_{\overrightarrow{u}})$.

Le vecteur opposé au vecteur $\overrightarrow{u}$ est le vecteur :

$$-\overrightarrow{u}(-x_{\overrightarrow{u}}; -y_{\overrightarrow{u}})$$

5 - VECTEUR NUL

Vous imaginez bien sûr à quoi va ressembler le vecteur nul.

Définition : Les coordonnées du vecteur nul sont :

$$\overrightarrow{0}(0; 0)$$

6 - TRANSLATION

Et la translation au sens des coordonnées, cela donne quoi ?

Propriété : Soient $\overrightarrow{u}(x_{\overrightarrow{u}}; y_{\overrightarrow{u}})$ et $A(x_A; y_A)$.

Soit A' , l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.

Les coordonnées de A' sont :

$$\begin{cases} x'_A &= x_A + x_{\overrightarrow{u}} \\ y'_A &= y_A + y_{\overrightarrow{u}} \end{cases}$$

Donnons un exemple.

Exemple : Soient $\overrightarrow{u}(6; -1)$ et $A(5; 4)$. Calculons les coordonnées du point A' , image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.

$$\begin{cases} x'_A &= x_A + x_{\overrightarrow{u}} = 5 + 6 = 11 \\ y'_A &= y_A + y_{\overrightarrow{u}} = 4 - 1 = 3 \end{cases}$$

On a donc : $A'(11; 3)$.