

ROTATIONS ET ANGLES

Nous avons déjà travaillé une transformation, la translation. En voici une autre, qui tourne cette fois-ci : la **rotation**. C'est également l'occasion pour nous d'étudier les angles en géométrie.

www.mathsbook.fr

I - LA ROTATION

1 - DÉFINITION

Je vous ai dit que c'était une transformation déjà. Vous ne voudriez sûrement pas vous contenter que de cela. Voici une définition plus complète.

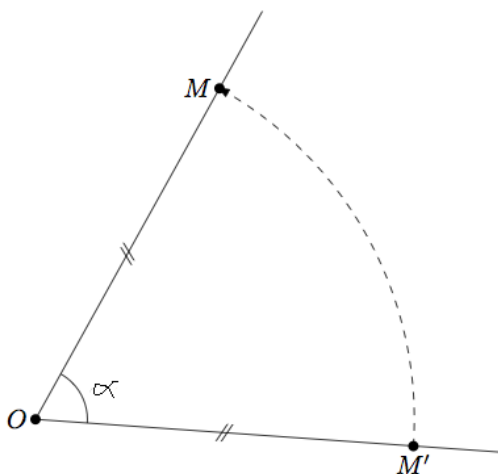
Définition : Une **rotation** est une transformation géométrique définie par :

- un point : le **centre de rotation**,
- un angle,
- un sens de rotation, positif ou négatif.

De plus, l'image d'un point M par la rotation de centre O et d'angle α dans un sens négatif (sens des aiguilles d'une montre) ou positif est le point M' tel que :

$$OM = OM'$$

$$\widehat{MOM'} = \alpha$$



Remarque : Vous l'allez compris, les rotations conservent les longueurs. Cela ne s'arrête pas là.

2 - PROPRIÉTÉS

Voilà les propriétés sur les rotations.

Propriétés : Soient A, B, C et D quatre points du plan, et A', B', C' et D' leurs images respectives par une rotation.

- La rotation conserve les longueurs : $A'B' = AB$ ou $B'C' = BC$.
- La rotation conserve les angles : $\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC}$ ou $\widehat{D'A'C'} = \widehat{DAC}$.
- La rotation conserve les aires : le quadrilatère $A'B'C'D'$ a la même aire que le quadrilatère $ABCD$.
- La rotation conserve l'alignement : si A, B et C sont alignés, alors leurs images A', B' et C' le sont aussi.
- La rotation conserve les milieux : si I est le milieu du segment $[DC]$, alors on aura I' milieu du segment $[D'C']$.
- La rotation transforme un segment en un segment, une droite en une droite, une demi-droite en une demi-droite et un cercle en un cercle.

Cela se comprend très bien. C'est un peu comme la symétrie centrale. On a un point qui est le centre de rotation et au lieu de faire une symétrie, on tourne par rapport à lui, sans toucher à la figure (segment, droite, cercle ou autres). Donc, rien ne change.

Pour la construction maintenant.

Pour transformer un segment par une rotation, on transforme les deux extrémités de ce segment.

Pour transformer une droite par une rotation, on prend deux points de cette droite et on les transforme, ce qui nous donne une nouvelle droite image de la première par cette rotation.

Pour une demi-droite, on prend l'extrémité et on choisit un second point et c'est gagné.

II - POLYGONES RÉGULIERS

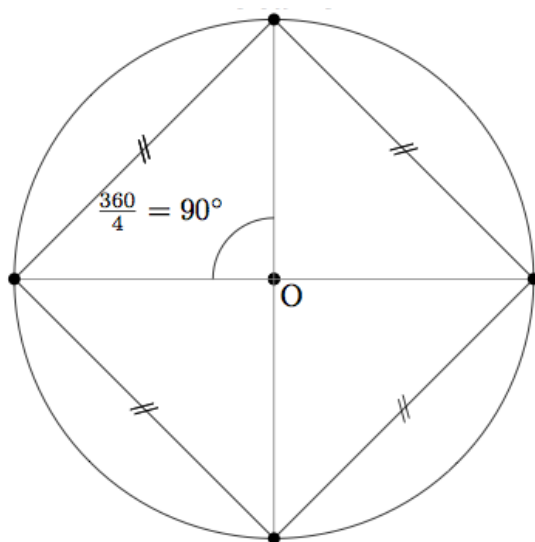
Une nouvelle figure géométrique : le **polygone régulier**.

Définition : Un **polygone régulier** est un polygone dont tous les sommets sont sur un même cercle et dont tous les côtés ont la même longueur.

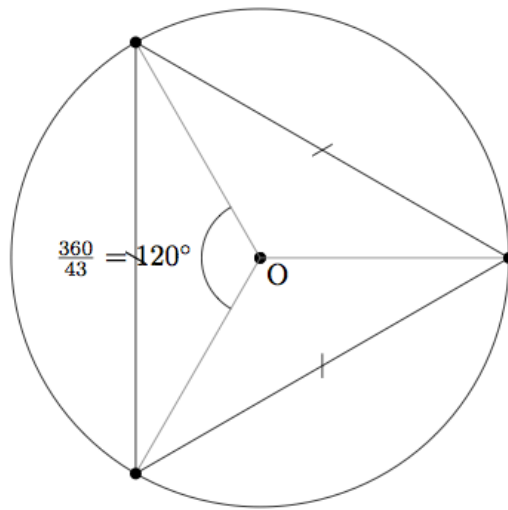
Tous les angles d'un polygone ont la même mesure.

Si n est le nombre de côtés d'un polygone régulier, alors l'angle au centre est égal à $\frac{360}{n}$.

Exemples : Le carré est un polygone régulier car il a quatre côtés égaux et il peut être dessiné dans un cercle avec ses quatre sommets sur ce cercle.

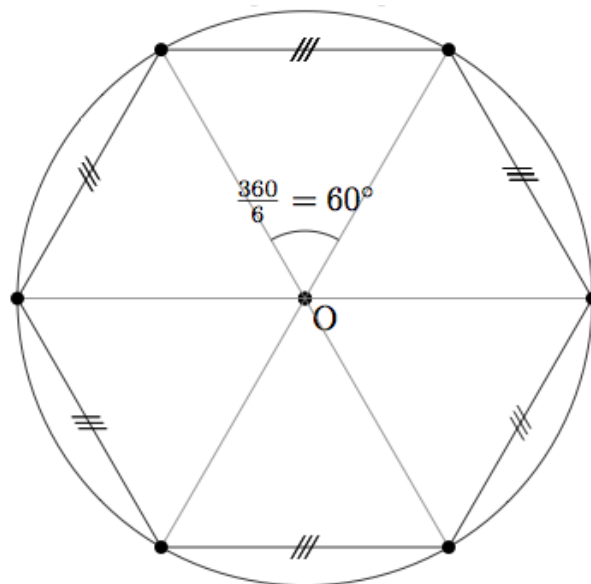


On connaît aussi le triangle équilatéral, avec ses trois côtés égaux, il pourrait être dans un cercle.

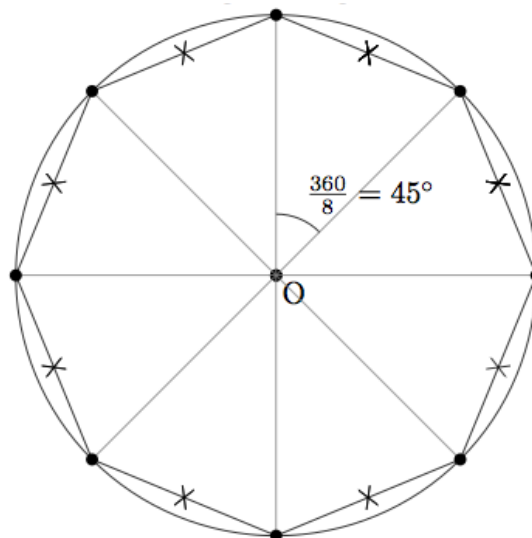


Voici deux nouveaux polygones réguliers à présent : l'**hexagone régulier** et l'**octogone régulier**.

L'hexagone régulier est un polygone à six côtés égaux, d'où le "hexa" qui signifie "six". Ses angles sont égaux à 60° .



Quant à l'octogone régulier, il a 8 côtés égaux, d'où le "octo", et ses angles mesurent tous 45° .



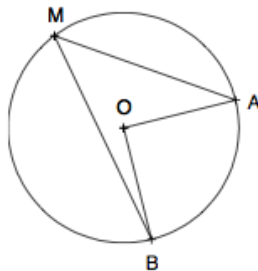
J'ai parler d'angle au centre. Vous ne savez surement pas ce que c'est. Je vais vous définir ça dans la section suivante.

III - ANGLES INSCRITS ET ANGLES AU CENTRE

Cette partie est très importante. Je vais vous introduire un nouveau théorème que vous devrez souvent utiliser dans des exercices.

Définition : Soient un cercle de centre O , A , B et M trois points de ce cercle.

- L'angle $\widehat{AMB}$ est **inscrit** au cercle.
Les segments $[MA]$ et $[MB]$ sont des **cordes** du cercle.
- L'angle $\widehat{AMB}$ **intercepte l'arc** AB .
- L'angle $\widehat{AOB}$ est un **l'angle au centre**.
L'angle inscrit $\widehat{AMB}$ et l'angle au centre $\widehat{AOB}$ interceptent le même arc AB .



Je vous énonce maintenant le théorème.

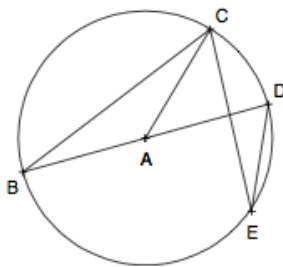
Théorème de l'angle inscrit : Dans un cercle, l'angle inscrit mesure la moitié de l'angle au centre qui intercepte le même arc.

Dans notre exemple :

$$\widehat{AMB} = \frac{1}{2} \widehat{AOB}$$

Deux angles inscrits qui interceptent le même arc sont égaux.

Exemple : Soit la figure suivante :



Les angles $\widehat{CBD}$ et $\widehat{CED}$ interceptent le même arc CD . Donc :

$$\widehat{CBD} = \widehat{CED}$$

A est le centre du cercle et l'angle au centre $\widehat{CAD}$ intercepte aussi l'arc CD . Donc :

$$\widehat{CAD} = 2\widehat{CED}$$