

VECTEUR ET TRANSLATION

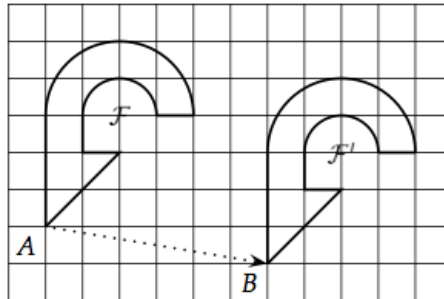
Un des chapitres les plus importants de cette année de troisième.
Dans ce chapitre, nous allons revenir sur la translation et définir la notion de **vecteurs**, très utilisées en mathématiques.
Vous aurez sûrement un exercice sur ce chapitre durant l'épreuve de Juin prochain. Alors concentrez-vous bien.

www.mathsbook.fr

I - TRANSLATION

Ceci est un rappel.

Définition : Sur le dessin suivant, $\mathcal{F}'$ est l'image de $\mathcal{F}$ par une translation qui transforme A en B .



Fini pour les rappels.

II - LES VECTEURS

1 - DÉFINITION

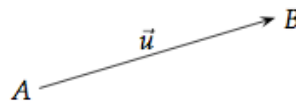
Qu'es-ce qu'un vecteur ? Commençons par là.

Définition : Un vecteur est défini par trois choses :

- Une direction,
- Une longueur,
- Un sens.

Un vecteur est représenté par une flèche.

On a souvent tendance à marquer un vecteur par deux points, un de départ et un point d'arrivée : $\overrightarrow{AB}$.

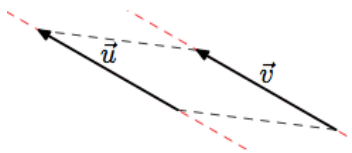


Dans la figure précédente, c'est une translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ qui transforme le point A en B , ainsi que tous les autres points de la figure $\mathcal{F}$ par les points correspondant de la figure $\mathcal{F}'$ tel que chaque point et son image soit traduits d'une même longueur, d'un même sens et d'une même direction que le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

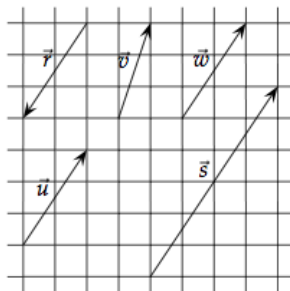
2 - VECTEURS ÉGAUX

Lorsqu'on translate une figure, on translate en fait tous les points qui composent cette figure. Et ces points et leurs images correspondantes forment chacun un vecteur égal au vecteur de la translation.

Définition : Si deux vecteurs ont la même direction, la même longueur et le même sens, alors ces vecteurs sont **égaux**.



Regardez la figure suivante.

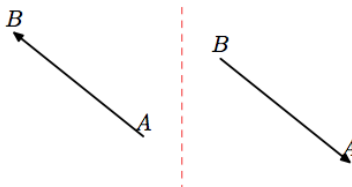


Les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ont la même direction mais des longueurs différentes. Ils ne sont donc pas égaux.
Tandis que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{s}$ ont la même direction, le même sens et la même longueur, ils sont égaux. : $\vec{u} = \vec{s}$.

3 - VECTEURS OPPOSÉS

S'il manque une des trois condition, c'est fichu. Par exemple, si le sens est inversé...

Définition : Si deux vecteurs ont la même direction, la même longueur mais le sens inverse, alors ces vecteurs sont **opposés**.



Ci-dessus, les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{BA}$ sont opposés : $\vec{AB} = -\vec{BA}$.

4 - VECTEUR NUL

Le fameux vecteur nul. Vous croyez peut-être qu'il ne sert à rien. Détrompez-vous.
Mais à votre avis, c'est quoi, le vecteur nul ?

Définition : Un vecteur qui n'a ni de direction, ni de sens, ni de longueur est un **vecteur nul**.

Exemple : Les vecteurs $\vec{AA}$ et $\vec{BB}$ sont nuls car le point de départ du vecteur est le même que celui de l'arrivée.

Remarque : Si le vecteur $\vec{AB}$ est nul, alors les points A et B sont confondus.

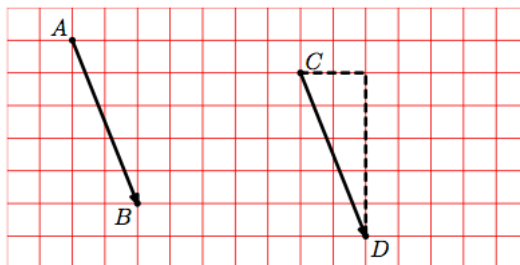
5 - VECTEURS ET TRANSLATION

Revenons à la translation par un vecteur.

Définition : Soit $\overrightarrow{AB}$ un vecteur quelconque.

L'image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le point D tel que :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

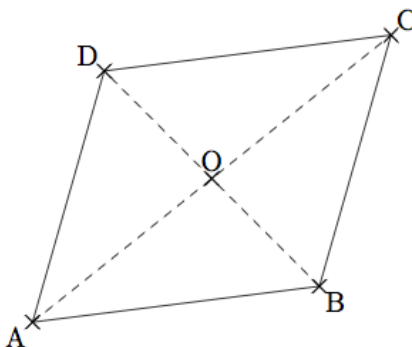


Il existe une autre méthode lorsque cela devient plus compliqué de tracer l'image d'un point par la translation vectorielle. Nous allons le voir tout de suite.

III - VECTEURS ET PARALLÉLOGRAMME

Vous vous rappelez de ce qu'est un parallélogramme bien sur ?

Propriété : Soit $ABCD$ un parallélogramme.



Alors on a les égalités vectorielles suivantes :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$$

$$\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$$

Cela se voit très bien, surtout en connaissant les propriétés du parallélogramme.

Voici la réciproque.

Propriété : Soit $ABCD$ un quadrilatère. Si on a une des égalités vectorielles suivantes :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$$

$$\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$$

Alors le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

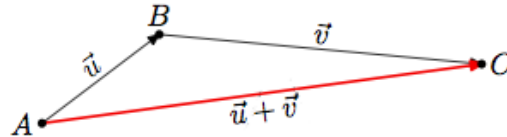
Les vecteurs et les parallélogrammes sont très liés vous aller le voir. Surtout lorsque l'on veut sommer des vecteurs.

IV - SOMME DE VECTEURS

On peut bien évidemment sommer deux vecteurs.

Définition : La composée de deux translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est une translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.

Dans la figure suivante,



On transforme le point A en point B par la translation de vecteur $\vec{u}$.

Puis, le point B en point C par la translation de vecteur $\vec{v}$.

Donc, le point C est l'image du point A par la translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.

Une relation appelée **Relation de Chasles** traduit cela.

Relation de Chasles : Si M' est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{u}$ et M'' l'image de M' par la translation de vecteur $\vec{v}$, alors M'' est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ et on a la relation, appelée **relation de Chasles**, suivantes :

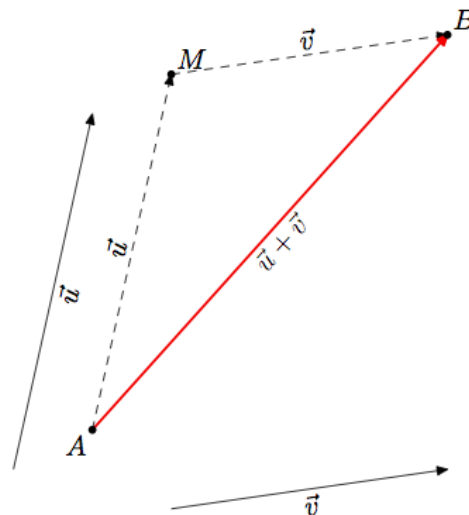
$$\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''}$$

En fait, on a décomposé le vecteur $\overrightarrow{MM''}$ par M' .

Vous remarquerez que le point d'arrivée du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est le point de départ du vecteur $\overrightarrow{M'M''}$. Et si l'on prend le point de départ du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ et le point d'arrivée du vecteur $\overrightarrow{M'M''}$ on obtient le vecteur $\overrightarrow{MM''}$.

Il y a deux méthodes de construction :

- En mettant les vecteurs bout à bout comme ceci :

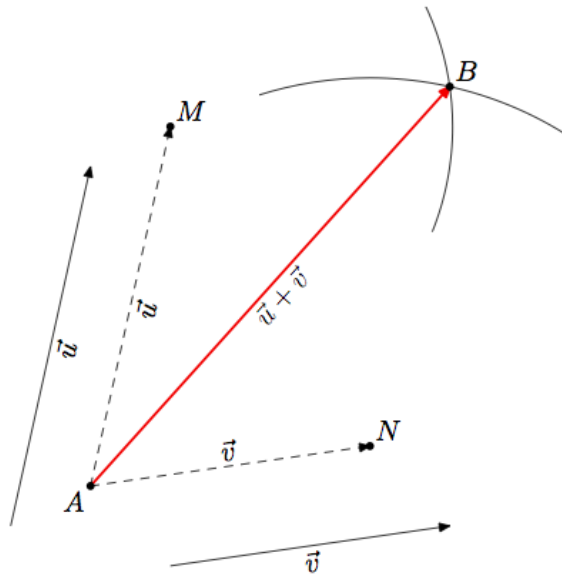


On construit le point M tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$.

Puis on reproduit le vecteur $\vec{v}$ au point M .

Le point d'arrivée est le point B , image du point A par la translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.

- En utilisant les égalité du parallélogramme.



On reproduit les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ au point A, ce qui nous donne respectivement les points M et N.
On construit le point B tel que le quadrilatère ANBM soit un parallélogramme.

V - DEUX SYMÉTRIES CENTRALES SUCCESSIVES

Je vous rappelle qu'une symétrie centrale est une symétrie par rapport à un point.

Propriété : Soient A et B deux points distincts du plan.

La composée de la symétrie centrale de centre A et de la symétrie centrale de centre B est une translation de vecteur $\vec{AB} + \vec{BA} = 2\vec{AB}$.

