Calcul littéral

Dans ce chapitre, nous allons travailler sur des expressions littérales. Nous allons les simplifier au moyen de plusieurs règles que l'on va énoncer dans ce chapitre. Puis nous verrons la résolution de problème grâce aux équations. Vous êtes prêt ? C'est parti !

I - Expression littérale

Définition : Une **expression littérale** est une expression (un calcul) qui comporte des lettres.
Pour donner une valeur numérique à ce calcul, il faut donner des valeur à ces lettres.

Exemple : $B = x + 3 \times y$ est une expression littérale, qui vaut 7 pour $x = 1$ et $y = 2$ car : $B = 1 + 3 \times 2 = 7$.

II - Réduction

On aura souvent affaire à des expression littérales longues, voire très longues. Il faudra d'abord les ranger en regroupant les termes qui vont ensembles puis les additionner. Prenons un exemple.

Exemple : On vous donne l'expression suivante : $A = 3x - 1 + 2y + 5x + 2z - 6y - 2$.
Alors première chose à faire : ne pas paniquer en voyant des tonnes de lettres. Il n'y en a que trois différentes : x, y et z. Ces lettres sont des inconnues. Dites vous tout simplement qu'elles représentent des fruits : x est une pomme, y est une poire et z une orange. On ne touche pas aux nombres non suivis de lettre. L'expression de A devient donc, en langage de fruits :

A = 3 pommes - 1 + 2 poires + 5 pommes + 2 oranges - 6 poires - 2.

On va maintenant faire un peu d'ordre dans tout ça, en rangeant les pommes avec les pommes, les poires avec les poires, etc. Voici ce que cela donne :

A = 3 pommes + 5 pommes + 2 poires - 6 poires + 2 oranges - 2 - 1.

Si on avait ranger les poires avant les pommes par exemple, cela n'aurait eut aucune incidence sur le résultat vu que c'est une addition et qu'une addition est **commutative** ($a + b = b + a$).
Remettons donc les lettres :

$$A = 3x + 5x + 2y - 6y + 2z - 2 - 1$$

On a plus qu'à calculer : les x ensembles, les y ensembles et les z ensembles.

$$A = (3 + 5)x + (2 - 6)y + 2z - (2 + 1) = 8x - 4y + 2z - 3$$

Et c'est cette expression l'expression réduite et simplifier car on ne connait pas les valeurs de x, y et z. Donc le calcul est terminé.

Remarque très importante : Vous trouverez parfois des x^2 ou des y^3. Ne vous en faites pas, c'est le résultat de : $x \times x = x^2$ et $y \times y \times y = y^3$. Rappellez vous du chapitre précédent sur les puissances. Les inconnues à puissances sont considérés comme de nouvelles inconnues (ou de nouveaux fruits). Il ne faut SURTOUT PAS les additionner avec les mêmes inconnues sans puissances :

$$x^2 + x \neq 2x \neq 2x^2$$

Comment fait-on alors dans le cas où ils ne nous reste que des x et des x^2 par exemple ?
On laisse le résultat tel quel. Je vous rappelle que les lettres sont des **inconnues**, on ne connait PAS leur valeur (sauf si on nous la donne bien sur), on ne peut donc pas continuer le calcul, le calcul s'arrête.

III - Développement

Développement :

$$k(a+b) = ka + kb$$
$$k(a-b) = ka - kb$$

On dit que l'on distribue k sur a et b.

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$
$$(a+b)(c-d) = ac - ad + bc - bd$$

Remarque : Ces formules de développement sont à connaître PAR COEUR.

Exemples : Un de chaque cas. Comprenez bien tous ces exemples.

$A = 3 \times (5x-2) = 3(5x-2) = \underbrace{3 \times 5x} - \underbrace{3 \times 2} = 15x - 6$

$B = 2x(4+x) = \underbrace{2x \times 4} + \underbrace{2x \times x} = 8x + 2x^2$

$C = (3x+1)(2+x) = \underbrace{3x \times 2} + \underbrace{3x \times x} + \underbrace{1 \times 2} + \underbrace{1 \times x} = 6x + 3x^2 + 2 + x = 3x^2 + 6x + x + 2 = 3x^2 + 7x + 2$

$D = (-x-2)(1-x) = \underbrace{(-x) \times 1} + \underbrace{(-x) \times (-x)} - \underbrace{2 \times 1} - \underbrace{2 \times (-x)} = -x + x^2 - 2 + 2x = x^2 - x + 2x - 2 = x^2 + x - 2$

Si vous avez encore des problèmes de signes, faites un tour dans le chapitre 1 Les nombres relatifs et tout ira mieux.

IV - Equations

Définition : Une **équation** est une égalité comportant une lettre que l'on appelle **l'inconnue**. Le plus souvent, cette inconnue est x.
Le but est de trouver la valeur de cette inconnue pour que l'équation soit vérifiée.
Résoudre une équation, c'est donc trouver toutes les solutions de l'équation.

Remarque : A votre niveau (4ème), on travaillera uniquement sur des équations qui ont qu'une seule solution.

Comment résout-on une équation ?
Bien, il y a des méthodes.

Résolution d'équations : Deux principes fondamentaux pour la résolution d'équations :

- Transposition : quand on fait passer un terme d'un membre (d'un côté) à l'autre dans une équation, on change son signe.
- Multiplication et division : on peut multiplier (ou diviser) les DEUX membres de l'équation par un même nombre (non nul). Quand on fait passer un produit dans l'autre membre de l'équation, il devient quotient et inversement.

Je vais vous donner un seul exemple pour cette partie là. Tachez de bien le comprendre. J'expliquerai absolument toutes les étapes. C'est l'occasion pour vous de revoir tout ce que nous avons appris jusqu'à maintenant.

Exemple : On va résoudre l'équation suivante :

$$3x - 1 = -4 + 5x$$

On va tout d'abord rassembler tous les x d'un côté et le reste de l'autre en pensant bien à changer les signes.

$$3x - 5x = -4 + 1$$

Le $5x$ de droite est devenu $-5x$ en passant à gauche et le -1 de gauche est devenu $+1$ en passant à droite.
On simplifie les deux côtés de l'équations maintenant que l'ont a tout bien rangé.

$$-2x = -3$$

On se retrouve face au deux membres de l'équation négatifs. Or, on préfère tout (j'en suis sur) le signe $+$. On va donc multiplier la gauche et la droite de l'équation par (-1).

$$-2x \times (-1) = -3 \times (-1) \; 2x = 3$$

Je vous rappelle que $2x$ signifie $2 \times x$. Donc c'est un produit.
Ce 2 du $2x$ va passer à droite et devenir un quotient, comme ceci :

$$x = \frac{3}{2}$$

Or, la fraction $\frac{3}{2}$ est irréductible. On a terminé le calcul.
La solution est donc :

$$x = \frac{3}{2}$$

Si on remplace x par $\frac{3}{2}$, l'équation sera vérifié. Vous voulez la preuve ? Il n'y a qu'à demander !
Remplaçons tous les x de l'équation initiale par $\frac{3}{2}$ et calculons le côté gauche puis le côté droit :

$$3 \times \frac{3}{2} - 1 = \frac{3}{1} \times \frac{3}{2} - 1 = \frac{3 \times 3}{1 \times 2} - 1 = \frac{9}{2} - 1 = \frac{9}{2} - \frac{1}{1} = \frac{9}{2} - \frac{1 \times 2}{1 \times 2} = \frac{9}{2} - \frac{2}{2} = \frac{9-2}{2} = \frac{7}{2}$$

$$-4 + 5 \times \frac{3}{2} = -4 + \frac{5}{1} \times \frac{3}{2} = -4 + \frac{5 \times 3}{1 \times 2} = -4 + \frac{15}{2} = \frac{-4}{1} + \frac{15}{2} = \frac{-4 \times 2}{1 \times 2} + \frac{15}{2} = \frac{-8}{2} + \frac{15}{2} = \frac{-8+15}{2} = \frac{7}{2}$$

On remarque bien que les deux membres de l'équation sont égaux (les deux côtés qu'on a calculé sont égal à $\frac{7}{2}$). La solution est bonne. On a gagné !

Remarque : On aurait pu ne pas multiplier par (-1), les signes - se seraient simplifier à la fin du calcul.

V - Méthode pour la résolution de problèmes

Vous rencontrerez souvent des problèmes qu'il faudra que vous traduisiez en langage mathématiques. Pour cela, je vais vous donner quelques pistes.

- On représente ce que l'on cherche par une lettre : l'inconnue x,
- On traduit les données de l'énoncé de sorte à avoir une égalité faisant intervenir cette inconnue x,
- On résoud l'équation ainsi obtenue,
- La solution de cette équation est la solution du problème.

Voilà, vous êtes à présent prêt pour attaquer un petit problème.

Exemple : Résolution de problème :
Vous allez à la boulangerie. Vous prenez une baguette et un croissant. Cela vous coûte en tout 2 euros.
Or, vous savez, car vous avez l'habitude, qu'une baguette coûte 0,90 euros (90 centimes).
Combien a coûté le croissant ?

On commence par poser l'inconnue : soit x le prix cherché, c'est-à-dire le prix du croissant.
Ensuite, maintenant qu'on a l'inconnue, on va trouver l'équation équivalente au problème : le prix d'un croissante (soit x) $+$ le prix d'une baguette (soit 0,90 euros) nous ait revenu à 2 euros. Donc :

$$x + 0,90 = 2$$

On ne représente pas les unités dans l'équation.
Super ! On a trouvé l'équation à résoudre. La solution sera la solution du problème. Résolvons-la :

$$x + 0,90 = 2$$
$$x = 2 - 0,90$$
$$x = 1,10$$

Un croissant coûte donc : 1,10 euros.