

LES FRACTIONS

I - DÉFINITION

Définitions : Le résultat exact de la division de a par $b \neq 0$ est la fraction :

$$\frac{a}{b}$$

Avec a au numérateur et b au dénominateur.

Exemples :

$$\frac{16}{4} = 16 \div 4 = 4$$

$$\frac{15}{2} = 15 \div 2 = 7,5$$

$$\frac{10}{3} = 10 \div 3 = 3,333... \text{ Dans ce cas, on laisse le résultat sous forme de fraction } \frac{10}{3}.$$

II - EGALITÉS DE FRACTIONS

Plusieurs divisions pour avoir le même résultat, on dira que ce sont des fractions égales.

Si on multiplie (ou on divise) le numérateur et le dénominateur par le même nombre, alors la fractions reste la même.

Exemple :

Les fractions $\frac{30}{5}$ et $\frac{60}{10}$ sont égales car l'une est le double de l'autre, c'est-à-dire que si on multiplie la première fraction par 2 on obtient la seconde.

Et comment prouve-t-on que deux fractions sont égales ?

Facile : si on arrive à trouver un opérateur (multiplication ou division) qui permet de passer d'une fraction à l'autre c'est gagné.

Exemple :

Pour $\frac{3}{8}$ et $\frac{21}{56}$, on remarque que si on multiplie le numérateur de la première fraction (3) ainsi que son dénominateur (8) par 7 on retrouve la deuxième fraction. Ces deux fractions sont donc égales.

III - FRACTIONS IRRÉDUCTIBLES

Définitions : Parmi toutes les fractions égales, il y en a une qui possède le numérateur et le dénominateur les plus petits, on ne peut pas les réduire plus. On dit que cette fractions est **irréductible**.

Pour simplifier une fraction, on la mettre sous la forme d'une fraction irréductible.

On cherchera le **diviseur commun** du numérateur et du dénominateur pour les diviser par celui-ci.

Je m'explique tout de suite, ne vous en faites pas.

On va chercher le diviseur commun du haut et du bas de la fraction. Autrement dit, on regarde si le numérateur et le dénominateur de la fraction sont dans la même table de multiplication. Si c'est le cas, on va pouvoir les diviser par ce nombre, que l'on appellera le diviseur commun. Voici un exemple pour éclaircir le tout.

Exemple : La fraction $\frac{5}{15}$ possède un numérateur et un dénominateur qui sont dans la table de 5. On va donc pouvoir diviser le haut et le bas de cette fraction par 5, le diviseur commun de 5 et 15.

On commence par décomposer cette fraction de cette manière là :

$$\frac{1 \times 5}{3 \times 5}$$

On peut alors supprimer le 5 du haut et du bas.

En effet, dans la pratique, quand une fraction possède un même nombre au numérateur et au dénominateur, on les supprime à condition que l'opération soit une multiplication et **UNIQUEMENT** une multiplication.

On obtient donc :

$$\frac{1 \times 5}{3 \times 5} = \frac{1}{3}$$

Autre exemple :

Simplification de $\frac{36}{26}$:

Les nombres 36 et 26 font tous les deux partis de la table de 2 à première vue. On va donc diviser le numérateur et le dénominateur par 2.

$$\frac{36}{26} = \frac{18 \times 2}{13 \times 2} = \frac{18}{13}$$

Les nombres 18 et 13 n'ont aucun diviseur commun. On s'arrête là, la fraction est irréductible.

Mais comment sait-on tout de suite si le numérateur et le dénominateur d'une fraction ont un diviseur commun ?

Ah, je m'attendais à cette question. Vous voulez une astuce, c'est cela ? Bon, puisque vous avez pas mal travaillé jusqu'ici, je vous la donne.

Critères de divisibilité :

- **Divisibilité par 2** : Un nombre est divisible par 2 si son dernier chiffre est 0, 2, 4, 6 ou 8.
Exemple : 876 904 est divisible par 2 car il se termine par un 4.
- **Divisibilité par 3** : Un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est elle-même divisible par 3.
Exemple : 375 est divisible par 3 car $3 + 7 + 5 = 15$ et 15 est dans la table de 3.
- **Divisibilité par 4** : Un nombre est divisible par 4 si le nombre constitué de ses deux derniers chiffres est lui-même divisible par 4.
Exemple : 1 000 990 188 est divisible par 4 car 88 est divisible par 4.
- **Divisibilité par 5** : Un nombre est divisible par 5 si son dernier chiffre est 0 ou 5.
Exemple : 23 465 est divisible par 5 car son dernier chiffre est 5.
- **Divisibilité par 6** : Un nombre est divisible par 6 si il est à la fois divisible par 2 et par 3, c'est-à-dire si c'est un nombre pair dont la somme des chiffres est elle-même divisible par 3.
Exemple : 1572 est divisible par 6 car c'est un nombre pair et $1 + 5 + 7 + 2 = 15$ et 15 est divisible par 3.
- **Divisibilité par 9** : Un nombre est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est elle-même divisible par 9.
Exemple : 621 est divisible par 9 car $6 + 2 + 1 = 9$.
- **Divisibilité par 10** : Un nombre est divisible par 10 si son dernier chiffre est 0
Exemple : 45 567 320 est divisible par 10.

IV - MULTIPLICATION DE FRACTIONS

Définition : Pour multiplier deux fractions entre elles, on multiplie les numérateurs entre eux, et les dénominateurs entre eux.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

Exemples :

$$\frac{3}{5} \times \frac{4}{7} = \frac{3 \times 4}{5 \times 7} = \frac{12}{35}$$

Or, 12 et 35 n'ont pas de diviseur commun. Donc, la fraction est irréductible.

$$\frac{4}{3} \times \frac{9}{11} = \frac{4 \times 9}{3 \times 11}$$

Or, $9 = 3 \times 3$, on va pouvoir simplifier la fraction dès à présent en supprimant un 3 en haut et un 3 en bas comme ceci :

$$\frac{4 \times 9}{3 \times 11} = \frac{4 \times 3 \times 3}{3 \times 11} = \frac{4 \times 3}{11} = \frac{12}{11}$$

La fraction est simplifiée au maximum, elle est irréductible.

V - RÉDUCTION AU MÊME DÉNOMINATEUR

On sait comment multiplier deux fractions entre elles, mais comment les additionne-t-on et les soustrait-t-on ? Pour ce faire, il faut d'abord réduire les deux fractions à additionner (ou à soustraire) au même dénominateur.

Définition : Pour réduire deux fractions au même dénominateur, c'est-à-dire pour que les deux fractions aient le même dénominateur, on utilise le principe d'égalité.

Un exemple vaut mieux qu'un long discours.

Exemples :

Soit les fractions $\frac{3}{4}$ et $\frac{5}{6}$. Elles n'ont pas le même dénominateur. Il faut donc trouver un multiplicateur pour que les deux dénominateurs soient égaux.

Trouvé ! On va multiplier la première fractions par 3 et la seconde par 2 car $4 \times 3 = 12$ et $6 \times 2 = 12$. Allons-y :

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{9}{12}$$

et

$$\frac{5}{6} = \frac{5 \times 2}{6 \times 2} = \frac{10}{12}$$

Et voilà, c'est aussi simple que cela.

Remarque : Petite astuce pour réduire rapidement deux fractions au même dénominateur : multiplier la première fraction par le dénominateur de la seconde et la seconde par le dénominateur de la première. Attention ensuite à simplifier au maximum pour avoir une fraction irréductible.

VI - ADDITIONS ET SOUSTRATIONS DE FRACTIONS

Définition : Pour additionner (ou soustraire) deux fractions entre elles, il faut les mettre sous le même dénominateur puis effectuer le calcul au niveau du numérateur, le dénominateur n'effectue pas l'opération, il reste tel quel.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}$$

De même avec la soustraction.

Exemples : Reprenons les deux fractions de l'exemple précédent, que l'on avait mis sous le même dénominateur. Une partie du travail est déjà fait comme ça.

$$\frac{9}{12} + \frac{10}{12} = \frac{9 + 10}{12} = \frac{19}{12}$$

VII - COMPARAISON DE FRACTIONS

Définition : Pour comparer deux fractions, il faut absolument les mettre sous le même dénominateur. Dans ce cas là, on compare les numérateurs pour trouver quelle fraction est la plus grande.

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{b} \text{ si } a > c \text{ et } \frac{a}{b} < \frac{c}{b} \text{ si } a < c$$

Exemples : Reprenons encore une fois les deux fractions de l'exemple précédent, que l'on avait mis sous le même dénominateur. Une partie du travail est déjà fait comme ça.

Or, on a $9 < 10$. Donc tout simplement :

$$\frac{9}{12} < \frac{10}{12}$$

VIII - DIVISIONS DE FRACTIONS

Dans cette partie, nous allons voir comment diviser par une fraction. Mais avant tout, voici une définition importante, celle de l'**inverse**.

Définition : Si $a \neq 0$, l'**inverse** de a est :

$$\frac{1}{a}$$

Si $a \neq 0$ et $b \neq 0$, l'**inverse** de $\frac{a}{b}$ est :

$$\frac{b}{a}$$

Nous pouvons à présent définir la division par une fraction.

Définition : Diviser par une fraction revient à multiplier par son inverse.

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

Exemple :

$$\frac{\frac{5}{6}}{\frac{4}{9}} = \frac{5}{6} \div \frac{4}{9} = \frac{5}{6} \times \frac{9}{4} = \frac{5 \times 9}{6 \times 4} = \frac{5 \times 3 \times 3}{3 \times 2 \times 4} = \frac{5 \times 3}{2 \times 4} = \frac{15}{8}$$

Si vous avez du mal à comprendre ce calcul, relisez les paragraphes précédents sur la simplification des fractions.