

CALCUL INTÉGRAL

Nous avons appris à calculer la primitive d'une fonction. Vous verrez dans ce chapitre à quoi cela va bien nous servir. Je vais aborder avec vous la notion d'**intégral**. Concentrez-vous bien, c'est quelque chose de totalement nouveau et très important.

www.mathsbook.fr

I - DÉFINITIONS

1 - INTÉGRALE

Voici la définition.

Définition : Soit f une fonction continue et positive. On considère la courbe $\mathcal{C}$ de f dans un repère. On appelle **intégrale de a à b** , l'aire du domaine situé sous la courbe, entre les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ et l'axe des abscisses.

On la note :

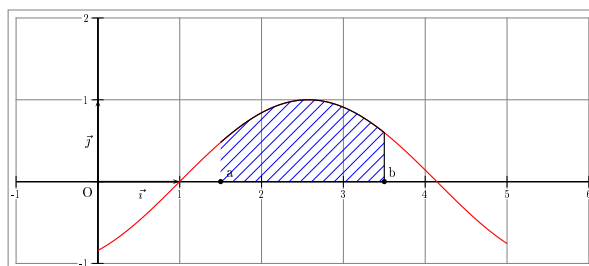
$$\int_a^b f(x)dx$$

Cette aire est exprimé en unité d'aire.

Les nombres a et b sont les **bornes** de l'intégrale.

Le dx de l'intégral signifie que la fonction est de variable x . Nous allons y revenir un peu plus tard.

En fait, c'est l'aire sous la courbe entre a et b et l'axe des abscisses, l'aire hachurée.



2 - CONVENTION

Petite convention sur les intégrales à savoir.

Convention : Si f est continue et négative sur $[a; b]$, alors l'intégrale de a à b est égale à l'aire du domaine situé sous la courbe, entre les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ et l'axe des abscisses, auquel on affecte un signe moins. On parlera alors d'**aire algébrique**.

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$, alors l'intégrale de a à b est égale à la somme des aires algébriques définies sur les intervalles où $f(x)$ garde un signe constant.

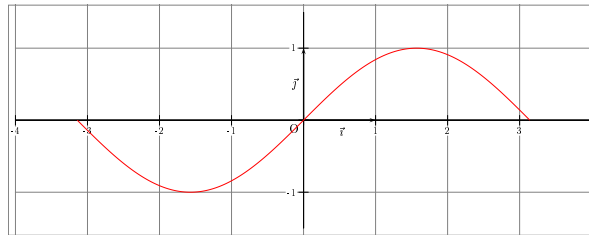
Je vais vous expliquer car ça paraît difficile à comprendre alors que c'est très simple.

Prenons un exemple.

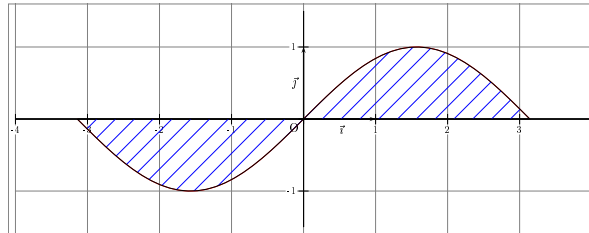
Exemple : Soit la fonction $f(x) = \sin x$ sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$.

La fonction est périodique de période 2π , ça veut dire qu'elle se répète indéfiniment tous les 2π .

Regardez bien cette fonction.



On remarque bien que la fonction sur l'intervalle $[-\pi; 0]$ est égale à la fonction sur l'intervalle $[0; \pi]$ à un signe moins près. Si nous calculons l'aire sous cette courbe sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$, ça donnera ceci sur le graphique :



Les deux parties hachurées sont égales, oui, mais à un signe moins près. Donc l'intégrale sera nulle.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx = 0$$

C'est ce que veut dire cette convention. On parle d'aire algébrique et non pas d'aire géométrique. Une intégrale, même si elle représente une aire, peut être nulle.

3 - VALEUR MOYENNE D'UNE FONCTION

Je vais vous apprendre à calculer la valeur moyenne d'une fonction. C'est comme pour des statistiques, mais avec des fonctions.

Définition : Soit f une fonction continue, définie sur un intervalle $[a; b]$.
La **valeur moyenne** de la fonction f sur $[a; b]$ est égale à :

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Pour l'instant je ne peux pas vous donner de vrai exemple vu que l'on a pas encore appris à calculer une intégrale. Vous saurez le faire les yeux fermés bientôt.

II - PROPRIÉTÉS

Beaucoup de propriétés sur les intégrales, qui vont nous aider à les calculer.

Propriétés :

- **Linéarité** : ($\lambda \in \mathbb{R}$)

$$\int_a^b (f + g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$
$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$$

- **Positivité** : Si pour tout $x \in [a; b]$,

$$f(x) \leq 0 \implies \int_a^b f(x)dx \leq 0$$
$$f(x) \geq 0 \implies \int_a^b f(x)dx \geq 0$$

- **Ordre** : Si pour tout $x \in [a; b]$,

$$f(x) \leq g(x) \implies \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

- **Relation de Chasles** : Pour tout $x \in [a; b]$,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

- **Inégalité de la moyenne** : Soient m et M deux nombres réels tels que pour tout $x \in [a; b]$, $m \leq f(x) \leq M$, alors :

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M$$

Facile. Rien de très difficile.

Exemple : Soit la fonction $f(x) = x^2 + 3x + 1$.

On a :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b x^2 + 3x + 1dx = \int_a^b x^2dx + \int_a^b 3xdx + \int_a^b 1dx = \int_a^b x^2dx + 3 \int_a^b xdx + \int_a^b 1dx$$

III - APPLICATION

Grâce aux intégrales, nous pouvons aussi calculer l'aire d'un domaine compris entre deux courbes.

Aire du domaine compris entre deux courbes : Soient f et g deux fonctions continues et positives, de courbes représentatives respectives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ telles que $f(x) > g(x)$ (f au dessus de g). L'aire du domaine compris entre ces deux courbes, sur $[a; b]$, est :

$$\int_a^b (f - g)(x)dx$$

L'aire de la courbe du haut, moins celle de la courbe du bas. Ce qui donne l'aire entre les deux courbes.

IV - INTÉGRALES ET PRIMITIVES

Enfin ! Je vais vous apprendre à calculer des intégrales. Regardez bien et savourez.

Théorème : Soient f une fonction continue sur un intervalle I , a et b deux réels de I et F une primitive de f sur I .
On a :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

On calcule la primitive de la fonction f , puis on fait une simple soustraction en fonction des bornes de l'intégrale.

Remarques : Deux remarques.

- Faites bien attention, c'est $F(b) - F(a)$ et non le contraire.
- Quand vous calculerez les primitives de fonctions pour déterminer une intégrale, ne prenez plus en compte les constantes d'intégrations car après avoir fait la soustraction, elles se simplifieront.

Génial. Calculons maintenant ensemble notre première intégrale.

Exemple : Soit la fonction $f(x) = 2x^2 + 1$. Calculer l'intégrale de f entre 1 et 3.

D'abord, on utilise les propriétés pour décomposer cette intégrale.

$$\int_1^3 f(x)dx = \int_1^3 2x^2 + 1dx = 2 \int_1^3 x^2dx + \int_1^3 1dx$$

Deux primitives à calculer ici : celle de la fonction x^2 et celle de la fonction constante égale à 1.

Or, une primitive de la fonction carré est $\frac{x^3}{3}$ et une primitive de 1 est x .

$$2 \int_1^3 x^2dx + \int_1^3 1dx = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 + [x]_1^3 = 2\left(\frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3}\right) + (3 - 1) = 2\left(3 - \frac{1}{3}\right) + 2 = \frac{22}{3}$$

Donc :

$$\int_1^3 f(x)dx = \frac{22}{3}$$

Cette intégrale représente l'aire sous la courbe représentative de la fonction f , entre les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ et l'axe des abscisses.

Voilà. Maintenant vous êtes capable de calculer n'importe quelle intégrale, du moment que vous êtes au point sur le chapitre des primitives.