

# CONVEXITÉ

Ce chapitre va définir deux nouvelles notions mathématiques : les fonctions convexes et les fonction concaves. Quelles sont les différences entre ces deux types de fonctions ?

Comment reconnaît-on ces fonctions ? Je vais tout vous expliquer.

C'est en fait la courbure de la fonction qui va déterminer si une fonction est éventuellement convexe ou concave.

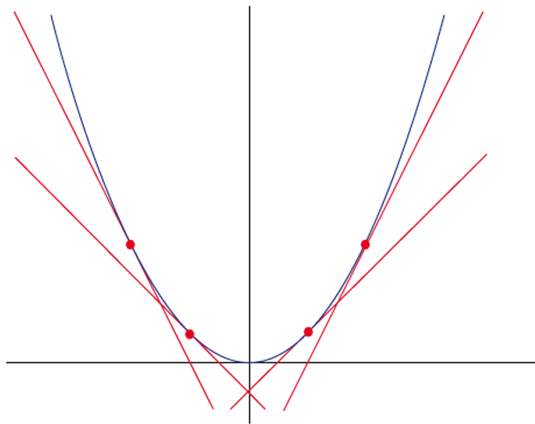
Nous verrons également ce qu'est un point d'inflexion, ce qui sera en rapport direct avec la convexité des fonctions.

[www.mathsbook.fr](http://www.mathsbook.fr)

## I - FONCTION CONVEXE

On commence par la fonction convexe, avec une définition avant la propriété.

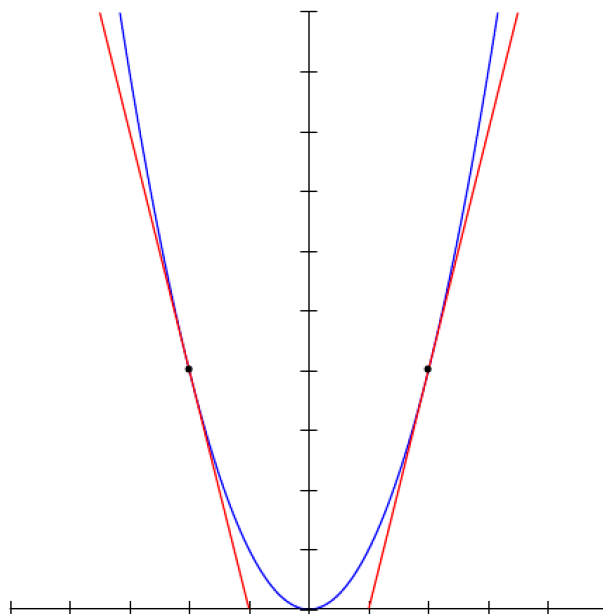
**Définition** : Une fonction est convexe sur un intervalle  $I$  si sa courbe représentative est intégralement située au-dessus de chacune de ses tangentes sur  $I$ .



Je pourrai tout expliquer, mais je pense que la figure est très claire.

Je vais quand même vous donner un exemple que vous connaissez tous.

Exemple : La fonction carrée  $f(x) = x^2$  est une fonction convexe.



### Et sans la courbe, comment on démontre qu'une fonction est convexe ?

C'est avec les dérivées première et seconde. J'y viens tout de suite avec ces deux propriétés.

**Propriétés** : Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ .

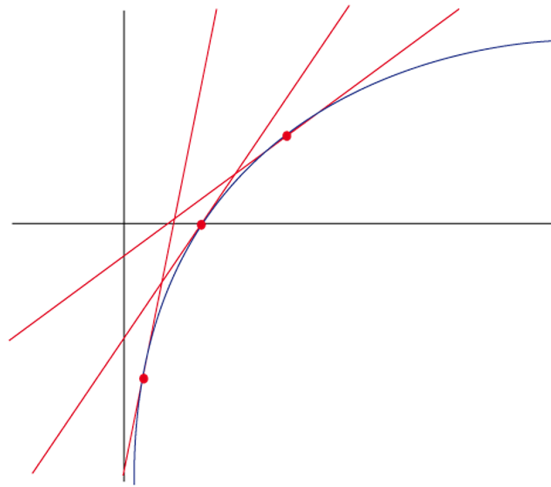
- La fonction  $f$  est convexe sur  $I$  si et seulement si sa dérivée  $f'$  est croissante sur  $I$ .
- La fonction  $f$  est convexe sur  $I$  si et seulement si sa dérivée seconde  $f''$  est positive sur  $I$ .

Donc, pour savoir si une fonction est convexe, il faut calculer sa dérivée première et, si celle-ci est croissante, autrement dit si la dérivée de cette dérivée (la dérivée seconde donc) est positive, la fonction est convexe sur l'intervalle donné.

## II - FONCTION CONCAVE

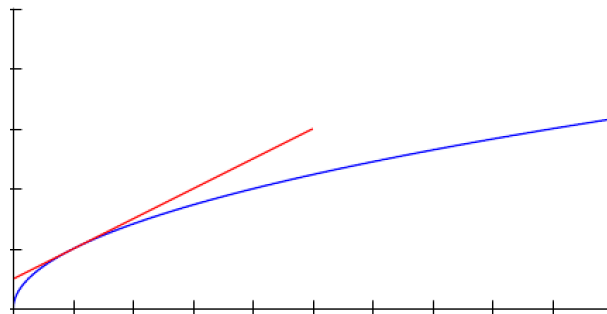
On passe à présent aux fonction concaves. Vous l'aurez compris je pense, c'est la même chose mais à l'envers on va dire.

**Définition** : Une fonction est concave sur un intervalle  $I$  si sa courbe représentative est intégralement située en-dessous de chacune de ses tangentes sur  $I$ .



Là aussi, la figure explique tout.  
Je vous donne un exemple.

Exemple : La fonction racine carrée  $f(x) = \sqrt{x}$  est une fonction concave.



*Encore une fois : comment démontre-t-on qu'une fonction est concave ? Avec les dérivées aussi ?*

Oui, encore avec les dérivées.

**Propriétés** : Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ .

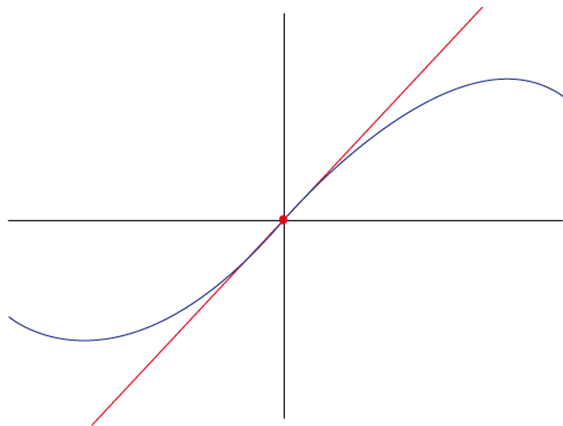
- La fonction  $f$  est convexe sur  $I$  si et seulement si sa dérivée  $f'$  est décroissante sur  $I$ .
- La fonction  $f$  est convexe sur  $I$  si et seulement si sa dérivée seconde  $f''$  est négative sur  $I$ .

Pour savoir si une fonction est concave, il faut donc calculer sa dérivée première et, si celle-ci est décroissante, autrement dit si la dérivée de cette dérivée (la dérivée seconde donc) est négative, la fonction est concave sur l'intervalle donné.

### III - POINT D'INFLEXION

Et si on mélangeait les deux notions de fonctions convexe et concave ? On obtiendrait un point d'inflexion ! Je donne la définition tout de suite.

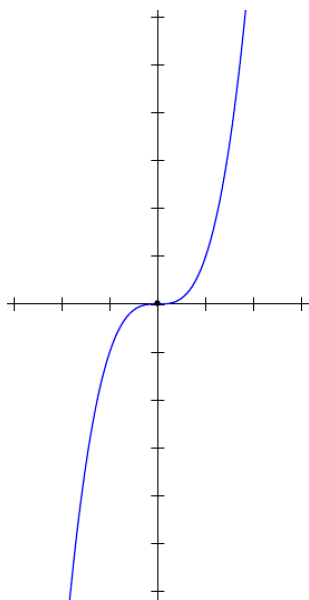
**Définition** : La courbe représentative d'une fonction admet un point d'inflexion si la fonction change de convexité en ce point.



En gros, si une fonction est concave jusqu'au point  $A(x_A ; y_A)$  puis convexe, le point  $A$  est un point d'inflexion. Pareil pour l'inverse.

**Remarque** : Graphiquement, un point d'inflexion est un point où la courbe représentative traverse sa tangente.

**Exemple** : La fonction cube  $f(x) = x^3$  possède l'origine comme point d'inflexion.



Et comment on démontre un point d'inflexion ?

**Propriété** : Soit  $f$  une fonction dérivable deux fois sur l'intervalle  $I$ .

La courbe représentative de  $f$  admet un point d'inflexion en  $A(a; f(a))$  si et seulement si sa dérivée seconde  $f''$  s'annule en  $a$  en changeant de signe.

**Attention** : Si la dérivée seconde s'annule en  $a$  sans changer de signe, ce n'est pas un point d'inflexion ! Ne vous trompez pas.

Pour montrer qu'un point est un point d'inflexion, il faut donc la dérivée seconde et montrer qu'elle s'annule en ce point en changeant de signe.