

FONCTION LOGARITHME

Nous allons étudier une toute nouvelle fonction très utilisée en mathématiques. Il s'agit de la **fonction logarithme népérien**.

Pas besoin de vous faire un cours d'Histoire, on attaque de suite l'étude.

www.mathsbook.fr

I - DÉFINITION

Il existe un nombre en mathématiques, que nous étudierons de plus près dans le chapitre suivant concernant la fonction exponentielle. C'est le nombre e .

Sachez juste pour le moment que :

$$e = 2,718281\dots$$

Définissons maintenant cette nouvelle fonction.

Définition : Pour tout nombre $a > 0$, il existe un unique nombre réel α tel que $e^\alpha = a$.

Ce nombre est appelé **logarithme népérien** de a et est noté $\ln a$.

On appelle **fonction logarithme népérien**, la fonction qui à tout $x \in]0; +\infty[$ associe $\ln x$:

$$x \mapsto \ln x$$

On appelle **fonction logarithme décimale** la fonction $\log$ qui à tout $x \in]0; +\infty[$ associe $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$:

$$x \mapsto \log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

Nous n'avons pas encore fait le chapitre sur les primitives. Cela ne serait tarder. Sachez que la fonction logarithme est la primitive de la fonction inverse.

Pour calculer par exemple $\ln 4$, vous utiliserez bien évidemment la calculatrice.

II - PROPRIÉTÉS

La fonction logarithme népérien pourrait aussi se définir ainsi : c'est la fonction vérifiant :

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

C'est la propriété fondamentale de cette fonction. Voici les autres.

Propriétés : Voici un grand nombre de propriétés sur cette fonction logarithme.

- $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$.
- $\ln x$ est négatif sur $]0; 1]$ et positif sur $[1; +\infty[$.
- Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\ln x = \ln y \iff x = y$$

$$\ln x > \ln y \iff x > y$$

- La fonction logarithme est continue, donc dérivable, et strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
- Pour tout $x > 0$,

$$\ln' x = \frac{1}{x}$$

- Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur I , alors :

$$(\ln \circ u)' = \frac{u'}{u}$$

- Pour tout $x, y > 0$,

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$$

- Pour tout a réel strictement positif et tout nombre rationnel r :

$$\ln a^r = r \ln a$$

Ces propriétés sont PRIMORDIALES. Vous devez absolument les connaître sur le bout des doigts.

Je veux juste insister sur une chose en particulier.

Retenez ceci : la fonction logarithme népérien ne "mange" que du positif. Qu'es-ce que cela veut dire ? En fait, le x du $\ln x$ doit **TOUJOURS** être strictement positif. Le résultat peut lui par contre être négatif.

III - TRACÉ DE LA FONCTION

Le domaine de définition de la fonction logarithme est : $]0; +\infty[$.

On a dit que la dérivée de la fonction logarithme était la fonction inverse :

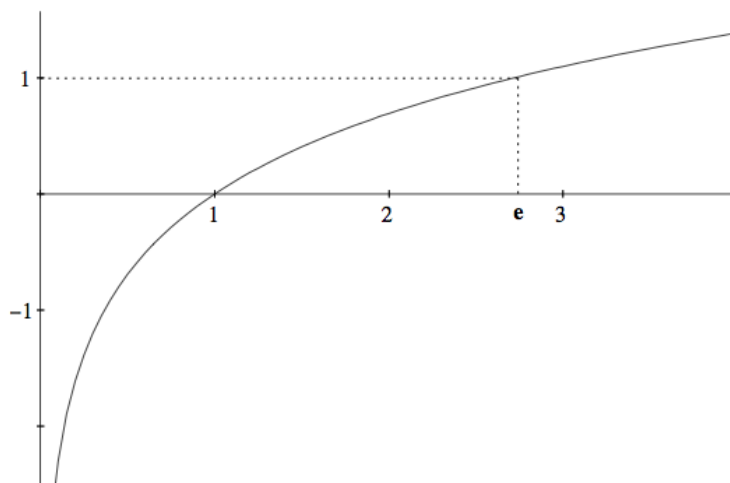
$$\ln' x = \frac{1}{x}$$

La fonction inverse est toujours positive sur l'intervalle $]0; +\infty[$. Donc la fonction logarithme est strictement croissante sur cet intervalle, son domaine de définition.

Traçons le tableau de variation.

x	0	1	$+\infty$
$f(x)$		0	

On en déduit aisément le tracé suivant.



Elle passe par 0 en $x = 1$, on retrouve la formule $\ln 1 = 0$.

IV - ETUDE DES LIMITES

Avec le tracé précédent, certaines limites se déduisent facilement.

Propriétés :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^n \ln x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Je ne vous démontre pas ces formules de limites. Elles sont à savoir.