

PRIMITIVES

Dans ce chapitre, nous allons voir une nouvelle notion mathématiques : les **primitives**. Nous allons bien évidemment la définir et énoncé ces propriétés.

Son utilisation sera mise en oeuvre dans les chapitres suivant. Je parle du chapitre sur l'intégration. En effet, cela nous aidera à calculer des aires. Oui, vous ne rêver pas. Nous ne faisons pas de géométrie pourtant, mais les aires peuvent se calculer autrement. Vous verrez, patience.

www.mathsbook.fr

I - DÉFINITION

D'abord une définition.

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

On appelle **primitive** de f sur I , toute fonction F dérivable sur I telle que, pour tout $x \in I$,

$$F'(x) = f(x)$$

Prenons une fonction f . Si on la dérive, on trouve la fonction f' , ça, on le savait déjà.

Maintenant, si on la primitive, on trouve une fonction F . Et si on dérive cette fonction F , on retombe sur la fonction initiale f .

En fait, quand on primitive une fonction c'est le chemin inverse de la dériver.

Exemple : La fonction $\frac{x^2}{2}$ est la primitive de la fonction x .

En effet, dérivons la fonction $\frac{x^2}{2}$:

$$\left(\frac{x^2}{2}\right)' = 2 \times \frac{x}{2} = x$$

On retombe bien sur la fonction x .

Bien sur, je vous donnerai bientôt des formules pour calculer des primitives.

II - PROPRIÉTÉS

Voici trois propriétés simples.

Propriétés :

- Soient f une fonction définie sur un intervalle I admettant une primitive F sur I et $C \in \mathbb{R}$. Alors l'ensemble des primitives de f sont les fonction G définies sur I de la forme :

$$G(x) = F(x) + C$$

- Soient f une fonction définie sur un intervalle I et admettant des primitives et $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Il existe une unique primitive F de f sur I vérifiant $F(x_0) = y_0$.
- Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur I .

La première propriété indique que lorsque l'on primitive une fonction, on a une constante. Cela se voit très bien car lorsque l'on dérive une fonction avec une constante, cette constante disparaît. On doit donc la faire réapparaître.

Exemple : La fonction $f(x) = 2x + 1$ a pour dérivée $f'(x) = 2$. Vous voyez bien que l'on a plus le 1.

Si je calcule la primitive, je trouve (vous saurez le faire dans quelques instants) : $F(x) = 2x + C$.

Sans le C , on ne retombe pas sur la fonction initiale f .

Nous trouverons la constante C réelle par d'autres moyens.

N'oubliez pas cette constante appelée **constante d'intégration** quand vous calculez une primitive, elle st très importante.

Remarque : Cette constante peut être nulle parfois.

La seconde propriété montre que pour un antécédent (ici x_0), la fonction admet une seule primitive. Pas de problème.

La dernière explique simplement qu'il suffit qu'une fonction soit continue sur un intervalle pour avoir une primitive.

III - TABLEAU DES PRIMITIVES USUELLES

Comme pour les dérivées, vous devez connaître le tableau des primitives usuelles. Aillez toujours en tête que c'est le sens inverse de la dérivation.

Fonction f	Primitive F
$k \in \mathbb{R}$	$kx + C$
$x^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + C$
$\frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N} * -\{1\}$	$\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + C$
$u'(x)u^n(x), n \in \mathbb{N} *$	$\frac{u^{n+1}(x)}{n+1} + C$
$\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$2\sqrt{u(x)} + C$
$\frac{u'(x)}{u^n(x)}, n \in \mathbb{N} * -1\}$	$\frac{-1}{(n-1)u^{n-1}(x)} + C$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln u(x) + C$
e^x	$e^x + C$
$u'(x)e^{u(x)}$	$e^{u(x)} + C$

Vous remarquerez bien que dans toutes les primitives, on retrouve la constante d'intégration C .

Je vais vous donner une poignée d'exemple.

Exemple 1 : La primitive de la fonction $f(x) = 5$ est $F(x) = 5x + C$.

En effet, la fonction f correspond à la première formule avec $k = 5$.

Exemple 2 : La primitive de la fonction $f(x) = x^4$ est $F(x) = \frac{x^5}{5} + C$.

En effet, la fonction f correspond à la deuxième formule avec $n = 4$.

On augmente la puissance de la variable x de la fonction f de 1 degré : $4 + 1 = 5$ et le nouveau degré obtenu sera aussi le nombre du dénominateur.

Exemple 3 : La primitive de la fonction $f(x) = \frac{-3}{\sqrt{x}}$ est $F(x) = -6\sqrt{x} + C$.

En effet, la fonction f correspond à la troisième formule.

C'est une fonction de la forme $\frac{1}{\sqrt{x}}$ avec un coefficient -3.

Donc la primitive est la fonction $F(x) = 2\sqrt{x} + C$ avec un coefficient -3, soit :

$$F(x) = -6\sqrt{x} + C$$

On n'a pas besoin de multiplier la constante par -3 parce-que cela restera une constante à déterminer. En effet, C ou $-3C$ reste une constante. Ce que l'on veut c'est une constante, un point c'est tout.

Exemple 4 : La primitive de la fonction $f(x) = \frac{3}{x^2}$ est $F(x) = -\frac{3}{x} + C$.

En effet, on applique la quatrième formule avec $n = 2$, et avec un coefficient de 3.

Exemple 5 : La primitive de la fonction $f(x) = \frac{7}{(-2x+3)^6}$ est $F(x) = \frac{-7}{2} \times \frac{-1}{5(-2x+3)^5} + C$.

En effet, on peut imaginer que la fonction f corresponde à la septième formule avec $u(x) = -2x + 3$ et $n = 6$ car on a un quotient de fonctions.

Mettons le coefficient 7 a part.

$$f(x) = 7 \times \frac{1}{(-2x+3)^6}$$

On retrouve facilement u' en dérivant u :

$$u'(x) = (-2x+3)' = -2$$

Cependant, ici, nous n'avons pas de -2 au numérateur. Il faut faire en sorte de l'avoir. On va donc multiplier le tout par $\frac{-2}{-2} = 1$ pour avoir ce $u'(x) = -2$ au numérateur. Cela ne va rien changer car en réalité on multiplie par 1 : $\frac{-2}{-2} = 1$.

$$f(x) = \frac{7}{-2} \times \frac{-2}{(-2x+3)^6}$$

Maintenant on peut appliquer la formule $\frac{-1}{(n-1)u^{n-1}(x)} + C$ car la fonction est de la forme :

$$\frac{u'(x)}{u^n(x)}$$

Avec $u(x) = -2x + 3$ et $n = 6$.

On laisse le facteur $\frac{7}{-2}$ à part.

Appliquons la.

$$F(x) = \frac{7}{-2} \times \frac{-1}{5(-2x+3)^5} + C$$

Notons bien que la puissance, comme elle se trouve au dénominateur, diminue de 1 ($6 - 1 = 5$) et on obtient un facteur égal à la nouvelle puissance, soit 5, au dénominateur.

Ce dernier exemple est primordial. Vous devrez appliquer la même méthode à chaque fois, quand vous avez des fonction $u(x)$.

Voici les étapes que je résume pour vous :

- Vous trouvez la formule à appliquer en regardant si c'est un quotient, un produit, ou s'il y a une racine sur une fonction au dénominateur.
- Trouver la fonction $u(x)$.
- Calculer la dérivée de cette fonction, soit $u'(x)$, et essayer de multiplier la fonction par un nombre afin de faire apparaître la forme que vous souhaitez.
- Appliquer bêtement la formule sur la fonction sans le coefficient (celui qui vous à aider à avoir la bonne forme).

Si vous savez faire ça, vous avez compris ce chapitre.