

CONTINUITÉ ET LIMITES

Nous entamons à présent le programme de Terminale Scientifique. Cette année c'est le bac ! Alors Concentrez-vous bien sur chacun des chapitres et tachez de TOUT retenir.

www.mathsbook.fr

I - CONTINUITÉ

Nous commencerons par la **continuité**. C'est quelque chose de très important en mathématiques, surtout si vous voulez continuer dans cette science après le bac.

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un élément de cet intervalle I .

On dit que f est **continue** en un point a si :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Je suppose que cette définition est un peu obscure pour vous. Je vais vous la traduire.

On prend tout d'abord une fonction f sur un intervalle I donné.

Si, quand on trace la fonction, on ne lève pas le crayon, la fonction est continue.

Si à un moment, à un point a par exemple, la fonction se "coupe", alors elle n'est pas continue.

Exemple : La fonction carrée $f(x) = x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Théorème : Toute fonction construite par composition ou opération à partir de fonctions polynômes ou trigonométriques est continue.

Exemple : La fonction $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$ est continue sur $\mathbb{R}$.

En effet : La fonction f est la somme de la fonction carré $f(x) = x^2$ que l'on multiplie par 2 et de la fonction $f(x) = x$ multiplié par 3, ainsi que de la fonction constante $f(x) = -4$.

Or, ces trois fonctions sont continues sur $\mathbb{R}$.

Donc la fonction $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$ est continue sur $\mathbb{R}$.

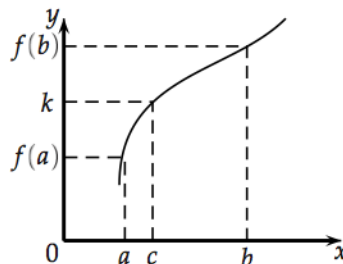
II - THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

Voici un des grands théorèmes de Terminale. C'est absolument sûr que vous aurez une question en rapport à l'épreuve de Juin prochain.

Je vous donne le théorème, suivi de son corollaire.

Théorème des valeurs intermédiaires : Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I . Soient deux réels a et b dans I .

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.



Corollaire : Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $[a, b]$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a, b]$.

Attention, il faut absolument une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a, b]$. Qu'es-ce que cela veut dire ? Cela veut dire que la fonction est soit strictement croissante, soit strictement décroissante sur $[a, b]$ et que sur cet intervalle, on peut tracer la fonction f sans lever le crayon.

Dans ces conditions là, pour tous les réels k compris dans l'intervalle $[f(a), f(b)]$, image de l'intervalle $[a, b]$, alors ce k admet un unique antécédent. La fonction passe obligatoirement une fois et une seule fois par ce k .

Regardez bien la figure précédente.

On a pris un intervalle $[a, b]$ et l'intervalle $[f(a), f(b)]$ qui n'est rien d'autre que l'image de l'intervalle $[a, b]$.

La fonction représentée est continue et strictement monotone, en l'occurrence croissante ici.

On voit très bien que n'importe quel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ admet un antécédent par la fonction f . Vous n'avez qu'à essayer. Prenez un autre k dans l'intervalle $[f(a), f(b)]$. Il aura toujours un et un seul antécédent par f .

Je vais vous donner une exemple important. C'est exactement ce qu'on vous demandera de faire le jour J.

Exemple : Soit f la fonction continue définie sur $[-3; 7]$.

On donne le tableau de variation de la fonction f ci-dessous.

x	-3	1	4	7
$f(x)$	7	-3	-1	-2

Combien de solution admet l'équation $f(x) = 0$?

- Premièrement, f est continue sur $[-3; 7]$, comme ça on l'a dit.
- On cherche $f(x) = 0$, donc on va chercher dans la ligne du bas du tableau de variation.
Or, $0 \in [-3; 7]$ (attention à l'ordre des nombres dans un intervalle, le plus petit d'abord). Cela correspond à l'intervalle de $x \in [-3, 1]$.
- La fonction f est strictement décroissante sur $[-3, 1]$.
- On a toutes les conditions. Appliquons le théorème des valeurs intermédiaires : L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[-3, 1]$.
Mais la question est posée sur l'intervalle $[-3; 7]$. Il faut donc vérifier si l'équation admet une autre solution dans l'intervalle restant, soit $[1, 7]$.
Regardons. Non, $f(x)$ ne passe plus par 0. En effet, elle part de -3 jusque -1, puis de -1 à -2. Donc sans passer par 0.
- Conclusion : L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[-3; 7]$.