Les nombres complexes

En seconde, vous aviez appris les différents ensembles de nombres : les naturels, les entiers, les décimaux, les rationnels et les réels, vous vous êtes arrêter là. Eh bien, sachez dés à présent qu'il y a encore beaucoup d'autres ensembles, qui vont plus loin que vous ne pouvez imaginer.
Dans ce chapitre, nous allons en étudier un : l'ensemble **complexe**. Ce n'est pas complexe du tout, vous allez voir.
Préparez-vous à entrer dans un nouveau monde...

I - Définitions

1 - Ensemble des nombres complexes

Vous vous demandez sûrement pourquoi on a inventé encore un autre ensemble ? Je vais vous répondre en vous donnant la définition suivante.

Définition : On appelle **ensemble des nombres complexes**, que l'on note $\mathbb{C}$, l'ensemble dont tous les éléments s'écrit de manière unique $z = a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$ et i un élément tel que $i^2 = -1$.

Le réel a est appelé **partie réelle** de z, notée $Re(z)$ et le réel b est la **partie imaginaire** de z, notée $Im(z)$.
Si $a = 0$, alors z est dit **imaginaire pur**.

Donc, nous avons un nombre z qui est égal à $a + ib$. Comprenez bien que seuls a et b sont des réels. i est un élément qui, élévé au carré, donne -1.
Le coefficient de i est la partie imaginaire du nombre complexe z et le terme sans le i est sa partie réelle.
Jusque là, ça devrait aller.

2 - Conjugué

On a déjà parler d'expression conjuguée quand on travaillait avec des fractions avec racines carrées, rappelez-vous. Ca a un rapport, oui.

Définition : Soit $z = a + ib$ un nombre complexe.
On appelle **conjugué** de z, noté $\overline{z}$, le nombre complexe défini par : $\overline{z} = a - ib$.

On a juste replacé le $+$ par un -.
Lorsque l'on multiplie une expression par son conjugué, on obtient l'identité remarquable : $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

3 - Module

Une autre chose à savoir, le **module** d'un nombre complexe.

Définition : Soit $z = a + ib$ un nombre complexe.
On appelle **module** de z, noté $|z|$, le nombre réel positif défini par : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Ca n'a pas un rapport avec une distance ?

Si, vous avez raison. Il y a un grand rapport avec la géométrie dans les nombres complexes. Nous verrons ça un peu plus tard dans le cours.
Le module d'un nombre complexe, c'est la racine carré du produit du nombre complexe par son conjugué.

$$|z| = \sqrt{z.\overline{z}} = \sqrt{(a + ib)(a - ib)} = \sqrt{a^2 - i^2 b^2 = a^2 + b^2}$$

II - Propriétés

Tout un tas de propriétés sont à connaître sur les nombres complexes.
Commençons par les évidentes.

Propriétés de calculs : Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes.

– **Addition** :
$$(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$$

– **Multiplication** :
$$(a + ib) \times (a' + ib') = aa' - bb' + i(ab' + ba')$$

– **Division** :
$$\frac{(a + ib)}{(a' + ib')} = \frac{(a + ib)(a' - ib')}{(a' + ib')(a' - ib')} = \frac{(a + ib)(a' - ib')}{a'^2 - b'^2} = \frac{aa' + bb'}{a'^2 - b'^2} + i(\frac{ba' - ab'}{a'^2 - b'^2})$$

C'est exactement la même chose qu'avec les nombres réels. Il faut juste avoir en tête que $\boxed{i^2 = -1}$.
Vous voyez, pour la division, on a multiplier en haut et en bas par l'expression conjuguée.

Exemples : $(6i + 2)^2 = 36i^2 + 24i + 4 = -36 + 24i + 4 = 24i - 32$.

Voici l'exemple d'une fraction de nombres complexes :

$$\frac{3i - 4}{2i + 2} = \frac{(3i - 4)(2i - 2)}{(2i + 2)(2i - 2)} = \frac{6i^2 - 6i - 8i + 8}{4i^2 - 4} = \frac{-14i + 8 - 6}{-4 - 4} = \frac{2 - 14i}{-8} = \frac{14i - 2}{8} = \frac{7i - 1}{4}$$

Voici les autres propriétés sur les nombres complexes.

Propriétés : Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes.

- **Egalité** :
$$a + ib = a' + ib' \Longleftrightarrow a = a', b = b'$$
- **Propriétés du conjugué** :
$$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$$
$$\overline{z.z'} = \overline{z}.\overline{z'}$$
$$\overline{(\frac{z}{z'})} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$$
pour tout $z' \neq 0$.
- **Propriétés du modules** :
$$|z.z'| = |z|.|z'|$$
$$|\frac{z}{z'}| = \frac{|z|}{|z'|}$$
pour tout $z' \neq 0$.
- **Autres propriétés** :
$$z.\overline{z} = |z|^2$$
$$z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \overline{z} = z$$
$$Im(z) = z \Longleftrightarrow \overline{z} = -z$$
$$Re(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$$
$$Im(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$
$$\overline{\overline{z}} = z$$
$$|\overline{z}| = |z|$$
$$|-z| = |z|$$

Quand je dis $Im(z) = z$, cela signifie que z est un imaginaire pur.

Ces propriétés sont très intéressantes/importantes et doivent être bien comprises.

Prenons l'exemple de la partie réel et de la partie imaginaire d'un nombre complexe $z = a + ib$.

$$Re(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} = \frac{a + ib + a - ib}{2} = \frac{2a}{2} = a$$

$$Im(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i} = \frac{a + ib - a + ib}{2i} = \frac{2ib}{2i} = b$$

Je vous laisse, en exercice, retrouver les autres propriétés.

III - Résolutions d'équation du second degré dans $\mathbb{C}$

Les nombres complexes vont nous être utilise plus d'une fois. Par exemple, dans les équations du second degré.
En effet, les équations du second degré qui n'avaient pas de solution réelle, car le discriminant était négatif, vont en avoir dans l'ensemble des complexes.

Propriété : Soit $az^2 + bz + c = 0$ une équation du second degré à coefficient réel, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.
Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de cette équation.

- Si $\Delta > 0$, alors l'équation admet deux solutions distinctes réelles :
$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$
- Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet une unique solution réelle :
$$z_1 = \frac{-b}{2a}$$
- Si $\Delta < 0$, alors l'équation admet deux solutions distinctes complexes :
$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$
$$z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Je vous donne un exemple.

Exemple : Résolvons l'équation $z^2 + z + 1 = 0$ dans $\mathbb{C}$.

Calculons tout d'abord le discriminant : $\Delta = 1 - 4 \times 1 \times 1 = -3$. On peut écrire que $\Delta = 3i^2$.
Le discriminant est négatif. On regarde dans l'encadré précédent... l'équation admet deux solutions distinctes complexes :
$$z_1 = \frac{-1 + \sqrt{3i^2}}{2} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$
$$z_1 = \frac{-1 - \sqrt{3i^2}}{2} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$
Et on a trouvé nos deux solutions.

IV - Argument d'un nombre complexe

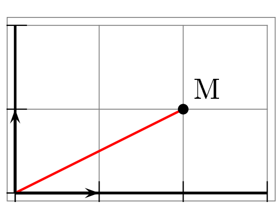
1 - Image et affixe

Voici une toute petite interprétation géométrique de l'ensemble complexe.

Définition : A tout nombre complexe $z = a + ib$, on associe un point M du plan, appelé **image** de z, de coordonnées $(a; b)$.
A tout point $M(a; b)$ du plan, on associe un nombre complexe $z = a + ib$ appelé **affixe** de z.

On prend un noble complexe $z = a + ib$. Le point M qui a pour coordonnées $(a; b)$ a en fait pour abscisse la partie réelle de z et pour ordonnée la partie imaginaire de z.
Prenons un exemple.

Exemple : Soit un point M de coordonnées $(2; 1)$. Le nombre complexe associé est $z = 2 + i$.



On trace le segment $[OM]$.
Sachez que **la longueur OM n'est rien d'autre que le module du nombre complexe z associé à M**.
L'angle que le segment $[OM]$ fait avec l'axe des abscisse est appelé **argument** de z.

2 - Argument - Définition

Voici la définition de l'argument d'un nombre complexe.

Définition : Soit $z = a + ib$ un nombre complexe.
On appelle **argument** du nombre complexe $z \neq 0$, noté $arg(z)$, l'angle θ défini par :

$$\cos\theta = \frac{a}{|z|}$$

$$\sin\theta = \frac{b}{|z|}$$

Je préfère me répéter : c'est l'angle que fait le segment $[OM]$, M étant le point du plan associé au nombre complexe z, avec l'axe des abscisses.

Et comment on calcul l'angle θ ?

On a des cosinus et des sinus, utilisons le cercle trigonométrique.

Exemple : Quel est l'argument du nombre complexe $z = 1 + i$?

Notons θ l'argument du nombre complexe z.
On applique les formules précédentes :

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Quel est l'angle sont le cosinus et le sinus sont égaux à $\frac{1}{\sqrt{2}}$?
Pour ceux qui connaissent ces tables trigonométriques, c'est l'angle $\frac{\pi}{4}$.
Donc :

$$arg(z) = \theta = \frac{\pi}{4}$$

Un nombre complexe peut donc s'écrire sous une forme trigonométrique.

Définition : Tout nombre complexe z non nul s'écrit sous sa **forme trigonométrique** :

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

3 - Propriétés

Tout un tas, encore, de propriétés sur l'argument d'un nombre complexe que l'on sait parfaitement retrouver en réfléchissant un tout petit peu.

Propriétés : Soient z et z' deux nombres complexes non nuls.

- $$arg(z.z') = arg(z) + arg(z')$$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $$arg(z^n) = n.arg(z)$$
- $$arg(z.z') = arg(z) + arg(z')$$
- $$arg(\frac{1}{z}) = -arg(z)$$
- $$arg(\frac{z}{z'}) = arg(z) - arg(z')$$
- $$arg(\overline{z}) = -arg(z)$$
- Si $k > 0$, $$arg(kz) = arg(z)$$
- Si $k < 0$, $$arg(kz) = arg(z) + \pi$$
- $k \in \mathbb{Z}$, $$z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow arg(z) = k\pi$$
- $k \in \mathbb{Z}$, $$Im(z) = z \Longleftrightarrow arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

N'oubliez jamais que quand on parle d'argument en complexe, on parle d'angle en géométrie.

Attardons-nous sur une propriété en particulier : $arg(z^n) = n.arg(z)$. Cela ne vous rappelle pas une certaine fonction exponentielle ?

V - Notation exponentielle

1 - Définition

Mélangeons la trigonométrie et les nombres complexes, on obtient une nouvelle notation pour un nombre complexe : la **notation exponentielle**

Définition : Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $\theta \mapsto \cos\theta + i\sin\theta$.
Cette fonction vérifie la propriété suivante : pour tous réels θ et θ', f$(\theta+\theta') = f(\theta)f(\theta')$. Cela se vérifie aisément.
Admettons que la fonction f soit dérivable. Sa dérivée est : $f'(\theta) = -\sin\theta + i\cos\theta$ et donc $f'(0) = i$.
Par analogie avec la fonction exponentielle, on écrit alors :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ et de module r ($arg(z) = \theta$ et $|z| = r$), alors on appelle **forme exponentielle** de z :

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

Vérifions juste une chose.
Soient θ et θ' deux réels et f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $\theta \mapsto \cos\theta + i\sin\theta$.

$$f(\theta+\theta') = \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta') = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i(\sin\theta\cos\theta' + \sin\theta'\cos\theta) = f(\theta)f(\theta')$$

Cette propriété est relative à la fonction exponentielle.
On a donc créer une notation exponentielle pour un nombre complexe.

2 - Propriétés

Les propriétés suivantes sont de simples propriétés de la fonction exponentielle. Vous ne devez avoir aucune difficulté à les comprendre.

Propriétés : Pour tout $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$,

–
$$e^{i\theta}.e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$$

–
$$\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta'}$$

–
$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

–
$$e^{\overline{i\theta}} = e^{-i\theta}$$

–
$$|e^{i\theta}| = 1$$

–
$$arg(e^{i\theta}) = \theta$$

3 - Exponentielle et géométrie

Utilisons cette notation pour introduire un peu la notion de géométrie à travers la propriété suivante.

Propriété : Soient $\mathcal{C}$ un cercle de centre O d'affixe ω et de rayon r et un point M d'affixe z.

$$M \in \mathcal{C} \Longleftrightarrow \exists\theta \in]-\pi;\pi[/z = \omega + ze^{i\theta}$$

L'équation $z = \omega + ze^{i\theta}$ est appelée **équation paramétrique complexe** du cercle $\mathcal{C}$.

C'est normal que cela soit encore un peu abstrait pour vous.
Tachez de savoir que l'équation paramétrique complexe d'un cercle de centre O d'affixe ω et de rayon r est : $z = \omega + ze^{i\theta}$ et regardez l'exemple qui suit.

Exemple : Déterminer le lieu géométrique suivant tel que pour tout point M du plan d'affixe z :

$$\{M(z) \in \mathcal{P}, |z+1-4i| = 3\}$$

Essayons de retrouver la forme $z = \omega + ze^{i\theta}$.

$$\{M(z) \in \mathcal{P}, |z+1-4i| = 3\} = \{M(z) \in \mathcal{P}, |z-(-1+4i)| = 3\} = \{M(z) \in \mathcal{P}, AM = 3\} = \mathcal{C}$$

Avec $A(-1;4)$.
On a bien : $|z-(-1+4i)| = AM$ car l'affixe de A est $z' = -1+4i$ et l'affixe de M est z. On calcul donc le module de AM en faisant : $|z-(-1+4i)|$.
L'ensemble recherché est le cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon 3.

VI - Les nombres complexes en géométrie

Les nombres complexes vont nous aider à montrer que des droites sont parallèles ou encore que des points sont alignés. Rappelez-vous toujours que un point M d'affixe $z = a+ib$ peut être placer dans un plan tel que son abscisse soit a et son ordonnée b.

Propriétés : Soient A, B et C trois points du plan d'affixes respectives a, b et c.

– Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $(b-a)$.

– La longueur AB vaut le module de l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$:

$$AB = |b-a|$$

– L'argument du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est l'argument de son affixe :

$$(\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{AB}) = arg(b-a)$$

– L'angle formé par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est :

$$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = arg(\frac{c-a}{b-a})$$

Faites bien attention, les nombres a, b et c sont complexes, de la forme : $a = x+iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.

Exemple : Soit les points A et B d'affixes respectives $4i$ et $\sqrt{3}+3i$.

L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est : $\sqrt{3}+3i-4i = \sqrt{3}-i$.

La longueur AB vaut : $AB = |\sqrt{3}-i| = \sqrt{\sqrt{3}^2+(-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$.

L'argument du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est : $arg(\sqrt{3}-i) = \theta$ tel que : $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire $-\frac{\pi}{6}$.
Donc, $arg(\overrightarrow{AB}) = -\frac{\pi}{6}$.

Voici un petit exemple de lieu géométrique.

Exemple : Déterminer le lieu géométrique suivant tel que pour tout point M du plan d'affixe z :

$$\{M(z)\in\mathcal{P}, |z+4| = |z-2i|\} = \{M(z)\in\mathcal{P}, |z-(-4)| = |z-2i|\} = \{M(z)\in\mathcal{P}, AM = BM\} = \mathcal{D}$$

Avec $A(-4;0)$ et $B(0;-2)$.
Le lieu recherché est la droite $\mathcal{D}$, médiatrice du segment $[AB]$, car on a tout le temps $AM = BM$, c'est la définition de la médiatrice.

Alors oui, pour déterminer des lieux géométriques, il faut connaître parfaitement sa géométrie.

On va pouvoir, comme je vous l'ai dit tout à l'heure, démontrer que des droites sont parallèles et bien plus encore.

Propriétés : Soient A, B, C et D quatre points distincts du plan d'affixes respectives a, b, c et d et $k\in\mathbb{Z}$.

– Les points A, B et C sont alignés si $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = k\pi$, soit $arg(\frac{c-a}{b-a}) = k\pi$.

– Les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires si $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}+k\pi$, soit $arg(\frac{c-a}{b-a}) = \frac{\pi}{2}+k\pi$.

– Les points A, B, C et D sont sur un même cercle si $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DB})+k\pi$, soit $arg(\frac{b-c}{a-c}) = arg(\frac{b-d}{a-d})+k\pi$.

Les points sont alignés si l'angle qu'ils forment est plat, soit égal à π.

Les droites sont perpendiculaires si l'angle qu'elles forment est égal à $\frac{\pi}{2}$, soit droit.

Quatre points sont sur un même cercle si les angles qui interceptent le même arc sont égaux.

Exemple : Les points A, B et C, d'affixes respectives $a = 1+i$, $b = 3-i$ et $c = 5-3i$, sont-ils alignés ?

Calculons :

$$arg(\frac{c-a}{b-a}) = arg(\frac{5-3i-1-i}{3-i-1-i}) = arg(\frac{4-4i}{2-2i}) = arg(2) = \pi$$

L'argument d'un réel est toujours égal à π. Si l'affixe d'un point est réelle, le point se situe sur l'axe des abscisses, donc son argument est égal à π forcément, l'angle est plat.
Donc, les points A, B et C sont alignés.

Retenez le résultat de cet exemple : Si l'affixe est réelle, alors l'argument est égal à π et les points sont alignés.

VII - Transformations géométriques

Nous connaissons les différentes transformations géométriques déjà. Pourquoi ne pas les traduire en complexe ?

Propriétés : Soit un point M du plan, d'affixe z.

- **Translation** : Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur d'affixe a.
  Alors, l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ est un point M' d'affixe $z' = z + a$.
  La translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ s'écrit :
  $$z' = z + a$$
- **homothétie** : Soient O un point du plan, d'affixe ω, et k un réel non nul.
  Alors, l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport k est un point M' d'affixe $z' = k(z-\omega) + \omega$.
  L'homothétie de centre $O(\omega)$ et de rapport k s'écrit :
  $$z' - \omega = k(z - \omega)$$
- **Rotation** : Soient O un point du plan, d'affixe ω, et θ un réel.
  Alors, l'image de M par la rotation de centre O et d'angle θ est un point M' d'affixe $z' = e^{i\theta}(z-\omega) + \omega$.
  La rotation de centre O et d'angle θ s'écrit :
  $$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$$

En connaissant la définition de chacune de ces transformation, cela se comprend parfaitement.

Par exemple, pour l'homothétie.
Soit h une homothétie de centre O, d'affixe ω et de rapport k réel non nul.
Soit M', d'affixe z', l'image d'un point M, d'affixe z, par h. Alors, par définition, on a : $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.
Traduisons cette égalité en complexe et on aura fini pour aujourd'hui :

$$\overrightarrow{OM'} = z' - \omega = k(z - \omega) = \overrightarrow{OM}$$

Je vous laisse le soin de le refaire pour la translation et la rotation.
Faites-le, c'est important. D'ailleurs, vous n'avez pas vraiment le choix vu que ça peut vous être demandé vers la fin du mois de Juin. Je dis ça, je dis rien.