

LIMITES DE SUITES ET DE FONCTIONS

Le chapitre précédent traitait des suites numériques. On avait, en particulier, dit qu'elles avaient des variations tout comme les fonctions. Il est rare de devoir calculer le u_{1000} mais parfois nous voulons savoir sa valeur approchée, vers quoi **tend** la suite au fur et à mesure des n croissants. C'est justement la notion de **limite** que nous allons étudier dans ce chapitre.

Dans ce chapitre, on dira souvent "à partir d'un certain rang". Ne soyez pas effrayer devant ces termes, cela veut simplement dire à partir d'un n assez grand.

Nous allons ensuite généraliser la notion de limite pour les fonctions et terminer en définissant les différentes asymptotes.

www.mathsbook.fr

I - LIMITES DE SUITES

1 - CONVERGENCE ET DIVERGENCE DE SUITES

Que peut faire une suite, au fur et à mesure des n croissants ?

Réponse :

- Soit tendre vers un réel,
- Soit tendre vers l'infini,
- Soit elle ne tend vers rien.

Définitions :

- On dit qu'une suite (u_n) **converge** vers un réel L si pour tout intervalle ouvert U contenant L , tous les termes de la suite appartiennent à U sauf un nombre fini.

On note alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$$

L est la limite de la suite (u_n) et elle est unique.

- Une suite est **divergente** si elle n'est pas convergente.

Explication : Si plus on va dans les n grands, plus la suite se rapproche d'un nombre, que l'on va désigné par le réel L , alors on dira que la suite est **convergente** vers le réel L .

Autrement dit, et en reprenant les termes de la définition, à partir d'un certain rang n , tous les termes de la suites tendent vers le réel L .

Si la suite ne se rapproche d'aucun réels, alors elle est **divergente**.

Mais attention : une suite divergente admet soit une limite infinie, soit aucune limite.

On dira qu'une suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ si tout intervalle ouvert $]a; +\infty[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang p . C'est-à-dire qu'à partir d'un certain nombre, que l'on désigne par a , les termes de la suite tendent vers l'infini.

Exemple : La suite $u_n = \frac{1}{n}$ tend vers 0.

En effet, cela se voit bien quand on calcule les premiers termes de la suite :

$$\begin{aligned}u_1 &= 1 \\u_2 &= \frac{1}{2} = 0,5 \\u_3 &= \frac{1}{3} = 0,33 \\u_4 &= \frac{1}{4} = 0,25 \\u_5 &= \frac{1}{5} = 0,2\end{aligned}$$

On doit calculer tous les termes de la suite pour savoir si elle converge ou pas ?

Non, pas du tout. Il faut tout de même en calculer quelques uns pour avoir une idée de la limite.

Regardez bien mon raisonnement qui peut paraître complexe la première fois.

Tout intervalle qui contient 0 contient également l'intervalle $] - a; a[$ avec $a > 0$, c'est de la pure logique.
Maintenant, si $u_n \in] - a; a[$, alors :

$$u_n \in] - a; a[\Leftrightarrow u_n < a \Leftrightarrow \frac{1}{n} < a \Leftrightarrow n > \frac{1}{a}$$

Donc, tous les termes de la suite u_n sont contenus dans l'intervalle $] - a; a[$ dès que n est supérieur à $\frac{1}{a}$.
Conclusion : la suite (u_n) converge vers 0.

Ne vous inquiétez pas, nous aurons des méthodes bien plus simples et plus rapides pour montrer la convergence ou la divergence d'une suite.

Et pour les suites divergentes ?

Exemple : La suite $u_n = (-1)^n$ est divergente. C'est l'exemple type.

En effet : la suite ne fait que osciller autour de 0 en prenant successivement les valeurs 1 et (-1) .

Une dernière propriété, très simple en plus.

Propriété : Une suite (u_n) converge vers L revient à dire que la suite $(u_n - L)$ converge vers 0.

Remarque : Les expressions "la suite tend vers" et "la suite a pour limite" sont équivalentes.

Une petite propriété qui se comprend très bien.

Propriété : Une suite (u_n) croissante non majorée tend vers l'infini.

2 - THÉORÈMES DE COMPARAISON

Nous allons attaquer les **théorèmes de comparaison** qui vont nous aider à montrer la convergence ou la divergence d'une suite.

Cette partie est très importante, concentrez-vous bien.

Dans les théorèmes que je vais vous énoncer, il y a beaucoup de conditions pré-requises. Si une d'entre elles manquent, le théorème ne peut être appliqué.

A - THÉORÈME DES GENDARMES

On débute par le critère de comparaison, appelé le **théorème des gendarmes**, vous comprendrez pourquoi.

Théorème des gendarmes : Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites numériques telles que (u_n) et (w_n) convergent vers L .

Si $u_n \leq v_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang, alors la suite (v_n) converge vers L .

Une conséquence immédiate de ce résultat est le suivant :

Si à partir d'un certain rang on a $|u_n - L| \leq v_n$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$, alors la suite (u_n) converge vers L .

Je vais vous appliquer ce théorème très puissant sur un exemple afin que vous saisissiez absolument tout.

Exemple : La limite de $\frac{\cos n}{n}$ est 0.

En effet : on sait que :

$$-1 \leq \cos n \leq 1$$

C'est la propriété fondamentale de trigonométrie. Si par malheur vous ne la connaissiez pas, je vous aurais arraché la tête !
Continuons...

On va diviser par n tous les membres de l'inégalité.

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\cos n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

On a donc trois suites : $u_n = -\frac{1}{n}$, $v_n = \frac{\cos n}{n}$ et $w_n = \frac{1}{n}$. Or,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0\end{aligned}$$

On a toutes les conditions pour appliquer le théorème des gendarmes.

Conclusion, la suite $\frac{\cos n}{n}$ converge vers 0.

B - CRITÈRE DE DIVERGENCE

La divergence à présent.

Critère de divergence : Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.

- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$,
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Cela se comprend assez bien.

Si la limite de la suite u_n est $+\infty$ et que la suite v_n est plus grande que la suite u_n , alors la limite de v_n sera plus grande que celle de u_n . Plus grand que $+\infty$ cela ne peut être que $+\infty$.

Si la limite de la suite v_n est $-\infty$ et que la suite u_n est plus petite que la suite v_n , alors la limite de u_n sera plus petite que celle de v_n . Plus petit que $-\infty$ cela ne peut être que $-\infty$.

Exemple : La suite $u_n = (3 + (-1)^n)n^2$ diverge vers $+\infty$.

En effet, on a :

$$3 + (-1)^n \geq 2$$

On multiplie l'inégalité par n^2 (positif, donc ne change aucun signe),

$$(3 + (-1)^n)n^2 \geq 2n^2$$

Or :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n^2 = +\infty$$

Donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (3 + (-1)^n)n^2 = +\infty$$

3 - OPÉRATIONS ALGÈBRIQUES

Quelques opérations algébriques sur les suites et leurs limites.

Propriétés : Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques convergentes de limites respectives L et L' .

- La suite $(u_n + v_n)$ est convergente et sa limite est égale à $L + L'$,
- La suite $(u_n v_n)$ est convergente et sa limite est égale à LL' ,
- Si $L' \neq 0$, la suite $\frac{u_n}{v_n}$ est convergente et sa limite est égale à $\frac{L}{L'}$,

Ces opérations sont très simples. Gagnons du temps et ne donnons pas d'exemple.

4 - LIMITES DE SUITES ET DE FONCTIONS

Nous allons étudier le cas où la suite u_n est définie explicitement à l'aide d'une fonction f .

Propriétés : Soient f une fonction définie sur $]a; +\infty[$ et $(u_n) = f(n)$ une suite définie à partir de $n > a$.

Si f admet en $+\infty$ une limite finie, ou infinie, alors la suite (u_n) admet la même limite.

C'est logique, vu que la suite est définie par une fonction.
On a juste remplacé le x de la fonction par le n de la suite.

Exemple : La suite $u_n = 3 + \frac{1}{2^n}$ a pour limite 3.

En effet : soit f la fonction $f(x) = 3 + \frac{1}{2x}$.

On a $u_n = f(n)$.

Or,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 + \frac{1}{2x} = 3$$

Oui, car $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 = 3$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = 0$. Par addition, on a le résultat que l'on voulait. Donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3 + \frac{1}{2n} = 3$$

Remarque : On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = 0$ car plus le x est grand (plus il tend vers l'infini), plus la fraction sera petite (plus elle va tendre vers 0).

5 - CAS DES SUITES GÉOMÉTRIQUES

Heureusement, les suites géométriques sont plus simples à étudier.

Théorème : Soit $q \in \mathbb{R} - \{0; 1\}$ (un réel non nul et différent de 1).

- Si $-1 < q < 1$, alors la suite (q^n) converge vers 0,
- Si $q > 1$, alors la suite (q^n) diverge vers $+\infty$,
- Si $q = 1$, alors la suite (q^n) converge vers 1,
- Si $q \leq -1$, alors la suite (q^n) n'a pas de limite.

Ce théorème est très explicite. Pas besoin donc de donner un exemple.

II - LIMITES DE FONCTIONS

Après avoir étudié les limites de suites numériques, nous passons désormais aux limites de fonction. C'est pareil sauf que cette fois ci, la variable d'une fonction peut tendre aussi bien vers $+\infty$ que vers $-\infty$, autrement dit, le x peut prendre des valeurs négatives tandis que le n des suites était un entier naturel.

1 - LIMITE FINIE EN L'INFINI

Commençons par la **limite finie** en $+\infty$ et $-\infty$.

Définitions : Soit f une fonction et l un réel.

- La fonction f a pour limite $l \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment grand.

On note :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$$

- La fonction f a pour limite $l \in \mathbb{R}$ en $-\infty$ si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment petit.

On note :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$$

C'est presque la même définition que pour les suites.

Je vais vous expliquer ça avec des mots moins savants.

Lorsque l'on fait tendre x vers l'infini (soit vers un nombre très grand), la fonction elle va tendre vers un réel. Plus le x sera grand, plus le $f(x)$ se rapprochera de ce réel noté l qui est la limite de la fonction.

C'est pareil pour la limite finie en $-\infty$. Lorsque l'on fait tendre x vers $-\infty$ (soit vers un nombre très petit), la fonction elle va tendre vers un réel. Plus le x sera petit, plus le $f(x)$ se rapprochera de ce réel noté l qui est la limite de la fonction. Vous avez compris ? Un petit exemple pour illustrer tout cela.

Exemple : La fonction inverse définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ tend vers le réel 0 lorsque x tend vers l'infini. Cela veut dire que plus le x est grand, plus le $f(x)$ sera petit et se rapprochera de la valeur 0.

On note cela ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

2 - LIMITE INFINIE EN a

Parfois, la limite en un point est infinie.

Définitions : Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant l'intervalle $]a; a + \epsilon[$ ou $]a - \epsilon; a[$, avec a un réel et $\epsilon > 0$.

– La fonction f a pour limite $+\infty$ en a si $f(x)$ est très grand dès que x est suffisamment proche de a .

On note :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

– La fonction f a pour limite $-\infty$ en a si $f(x)$ est très petit dès que x est suffisamment proche de a .

On note :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

C'est juste l'inverse de la première définition. Cette fois ci, ce n'est plus le x qui grandit mais le $f(x)$.

Lorsque l'on fait tendre x vers a , la fonction elle va tendre vers $+\infty$. Plus le x se rapprochera de la valeur de a , plus le $f(x)$ sera grand et tendra donc vers $+\infty$.

Et pour l'autre : lorsque l'on fait tendre x vers a , la fonction elle va tendre vers $-\infty$. Plus le x se rapprochera de la valeur de a , plus le $f(x)$ sera petit et tendra donc vers $-\infty$.

Exemple : La fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x-2}$ tend vers le réel l'infini lorsque x tend vers la valeur interdite de la fonction, c'est-à-dire 2. Cela veut dire que plus le x se rapproche de la valeur interdite 2, plus le $f(x)$ sera grand.

On note cela ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} = +\infty$$

3 - LIMITES DE FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

Les limites que je vais vous présenter dans cette section sont usuelles. Vous DEVEZ les connaître.

Définitions :

– Si $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$$

– Si n est pair,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$$

– Si n est impair,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$$

–

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

–

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

–

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

–

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

4 - OPÉRATIONS SUR LES LIMITES

Il nous ait déjà arrivé de faire des opérations sur les dérivées par exemple. La dérivée d'une somme est la somme des dérivées. C'est ce que nous allons faire ici mais avec des limites.

Dans cette section, a désigne soit un nombre réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$ et L et L' sont des réels.

Les exemples sont en faire de section.

Somme des limites :

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	L	L ou $+\infty$	L ou $-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x)$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	INDETERMINE

Remarque : Comme vous pouvez le constater, on ne sait pas faire $\infty - \infty$. C'est une limite **indéterminé**. Ne vous avisez surtout pas à donner une valeur à cette limite n'en a pas !

Produit des limites :

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	L	$L > 0$ ou $+\infty$	$L > 0$ ou $+\infty$	$L < 0$ ou $-\infty$	$L < 0$ ou $-\infty$	0
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (f \times g)(x)$	$L \times L'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	INDETERMINE

Quotient d'une limite :

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	L	$L = 0$ ou $f(x) > 0$	$L = 0$ ou $f(x) < 0$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)}$	$\frac{1}{L}$	$+\infty$	$-\infty$	0

Quotient des limites : Pour déterminer la limite de $\frac{f}{g}$, il suffit de déterminer la limite de $\frac{1}{g}$ puis de déterminer la limite du produit de f par $\frac{1}{g}$.

5 - FONCTION RATIONNELLE POLYNOMIALE AU VOISINAGE DE L'INFINI

Voyons maintenant une propriété intéressante et très pratique lorsque l'on manipule des polynômes.

Propriétés : Soit P un polynôme.

- La limite de ce polynôme P en $+\infty$ **ou** $-\infty$ est égale à la limite de son terme de plus haut degré.
- La limite d'une fonction rationnelle dont le numérateur et le dénominateur sont des fonction polynômes en $+\infty$ **ou** $-\infty$ est égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré.

Remarque importante : Attention, je précise bien, ces propriétés ne sont valables QUE quand on étudie la limite en $+\infty$ **ou** $-\infty$.

Exemple 1 : Soit le polynôme $P(x) = -x^5 + 3x^4 + x^3 - 5x + 2$.

Sa limite en $+\infty$ est celle de son terme de plus haut degré, c'est-à-dire c'est la limite de $-x^5$ et :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^5 = -\infty$$

Donc, la limite de P en $+\infty$ est $-\infty$.

Exemple 2 : On demande de calculer la limite en $+\infty$ de $\frac{x^3 - x^2 + 3x - 1}{2x^3 + 3x^2 - x + 5}$.

Facile. On prend les termes de plus haut degré du haut et du bas : $\frac{x^3}{2x^3} = \frac{1}{2}$. Donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x^2 + 3x - 1}{2x^3 + 3x^2 - x + 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Exemple 3 : Calculer la limite en $+\infty$ de $(3x^3 - x^2 + 2x - 4)(-2x^2 - 2)$.

Or,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^3 - x^2 + 2x - 4)(-2x^2 - 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^3 - x^2 + 2x - 4) \times \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^2 - 2)$$

Calculons donc séparément les deux limites puis nous effectuerons leur produit.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^3 - x^2 + 2x - 4 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -2x^2 - 2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} -2x^2 = -\infty$$

Le produit de $+\infty$ et de $-\infty$ est $-\infty$.

Conclusion :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^3 - x^2 + 2x - 4)(-2x^2 - 2) = -\infty$$

6 - LIMITE D'UNE FONCTION COMPOSÉE

Je vous défini une nouvelle notion : la **composition** de fonctions.

Définition : Soient f une fonction définie sur I et $g(x)$ une fonction définie sur $f(I)$.

La fonction $g \circ f$ (on dit "g rond f") est la fonction définie aussi sur le domaine I par :

$$g \circ f(x) = g[f(x)]$$

En fait, on remplace la variable de la fonction g par la fonction f .

Exemple : Soient deux fonctions $f(x) = x + 1$ et $g(x) = 3x^2 - 2x + 1$.

Si on veut $g \circ f$:

$$g \circ f(x) = g[f(x)] = 3(x + 1)^2 - 2(x + 1) + 1$$

Vous avez saisi l'idée ?

Je vous laisse terminer le calcul.

Théorème : Soient f une fonction définie sur I , $g(x)$ une fonction définie sur $f(I)$, a un élément de I (borne comprise), L et L' deux réels ou $\pm\infty$.

Si :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

$$\lim_{X \rightarrow L} g(X) = L'$$

Alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = L'$$

On a une première fonction f qui tend vers L lorsque sa variable x tend vers a .

Puis une seconde fonction g qui tend vers L' lorsque sa variable X tend vers L , la limite de la première fonction f .

Alors, la composée de ces deux fonction tend vers L' , limite de la seconde fonction g .

C'est quelque chose d'important. C'est pourquoi je vous donne quatre exemples différents, de difficulté progressive.

Exemple 1 : Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction $f(x) = \sqrt{x^3 - 2x^2 + 5x + 3}$.

C'est la fonction $g(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 3$ composée avec la fonction racine $h(X) = \sqrt{X}$.

Calculons la limite de g .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 2x^2 + 5x + 3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

Calculons aussi la limite de h quand x tend vers la limite de g soit $+\infty$.

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty$$

C'est facile en fait. On fait tendre l'intérieur de la racine vers l'infini. Le résultat est l'infini. Puis on regarde la limite de la racine de l'infini. Ce qui nous donne ...

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^3 - 2x^2 + 5x + 3} = +\infty$$

Exemple 2 : Un peu plus difficile. Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 5}{-x^2 + 5x - 6}$$

On bien que 2 est la valeur interdite de cette fraction car : $-2^2 + 5 \times 2 - 6 = 0$.

On a aussi la valeur 3 comme valeur interdite mais ne nous en préoccupons pas ici, on cherche la limite en 2, pas en 3.

Nous allons devoir étudier cette limite **au voisinage** de 2, c'est-à-dire autour de 2. On l'étudiera en 2^- (très proche de 2 mais toujours inférieur) et en 2^+ (très proche de 2 mais toujours supérieur).

Nous allons donc avoir besoin du signe de la quantité $-x^2 + 5x - 6$ pour un x tendant vers 2^- et pour un x tendant vers 2^+ . Dressons-le.

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
$-x^2 + 5x - 6$		-	+	-

On voit bien donc que le polynôme $-x^2 + 5x - 6$ est négatif avant 2 et positif après. Autrement dit, en 2^- , le polynôme $-x^2 + 5x - 6$ est négatif et en 2^+ il est positif. On a ce qu'on voulait !

Calculons maintenant les limites :

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} -x^2 + 5x - 6 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} -x^2 + 5x - 6 = 0$$

On va faire le quotient de ce polynôme.

Or, en 2^- , le polynôme $-x^2 + 5x - 6$ est négatif, donc son quotient va tendre vers $-\infty$ et en 2^+ il est positif, son quotient va tendre vers $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{-x^2 + 5x - 6} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{-x^2 + 5x - 6} = +\infty$$

N'oublions pas la limite du numérateur.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} x - 5 = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} x - 5 = -3$$

En fait, vu que 2 n'est pas une valeur interdite pour le numérateur, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 2} x - 5 = -3$$

Cette limite est négative. Quand on fait le quotient des deux limites, on trouvera donc :

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x - 5}{-x^2 + 5x - 6} = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x - 5) \times \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{-x^2 + 5x - 6} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 5}{-x^2 + 5x - 6} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 5) \times \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{-x^2 + 5x - 6} = -\infty$$

Fiou! On a terminé. Vous voyez bien que la limite diffère en fonction de la position de x : en 2^- elle vaut $+\infty$ et en 2^+ elle vaut $-\infty$.

7 - THÉORÈMES DE COMPARAISON

Comme pour les suites, il existe des **théorèmes de comparaison** qui vont nous aider à déterminer la limite d'une fonction.

Cette partie est très encore une fois importante.

Dans les théorèmes que je vais vous énoncer, il y a beaucoup de conditions pré-requises. Si une d'entre elles manquent, le théorème ne peut être appliqué.

A - THÉORÈME DES GENDARMES

Vous connaissez maintenant le principe.

Théorème des gendarmes : Soient f , g et h trois fonctions telles que :

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = b$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$$

Alors, on a :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

Exemple :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x^2} = 0$$

En effet, on sait que pour tout $x \neq 0$,

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

On divise tout par x^2 .

$$\frac{-1}{x^2} \leq \frac{\sin x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

Or,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x^2} = 0$$

B - COMPARAISON AU VOISINAGE DE $+\infty$

Deux théorèmes très pratiques basés sur la majoration et la minoration.

Théorème de minoration : Soient b un réel, f et g deux fonctions.

Si, pour tout $x \in]b, +\infty[$,

$$f(x) \geq g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

Alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Théorème de majoration : Soient b un réel, f et g deux fonctions.

Si, pour tout $x \in]b, +\infty[$,

$$f(x) \leq g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

Alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

Si f est majorée par une fonction g , c'est-à-dire que $f(x) \leq g(x)$ et si la limite de la fonction g est $-\infty$, alors la limite de f est plus petite que la limite de g , et plus petit que $-\infty$ c'est forcément toujours $-\infty$.

Pareil pour la minoration.

Exemple : On sait que pour tout x strictement positif : $\sqrt{1+x^2} \geq x$.

Or,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

On en déduit, d'après le théorème de minoration, que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1+x^2} = +\infty$$

III - COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE

La notion de **limite** implique l'existence **asymptote** que l'on a déjà vaguement vu dans les cours précédents. Qu'est-ce qu'une asymptote ?

Quand es-ce que l'on rencontre une asymptote ? Normalement, vous avez dû voir ça l'année dernière.

Si ce n'est pas le cas, je vais tout vous réexpliquer. Sachez en premier lieu, qu'il y en a trois différentes :

- Asymptote horizontale,
- Asymptote verticale,
- Asymptote oblique.

Une asymptote est une droite sur le graphique dont la courbe représentative de la fonction se rapproche de plus en plus en fonction d'un certain x , sans jamais la toucher.

1 - ASYMPTOTE HORIZONTALE

Commençons par l'horizontale.

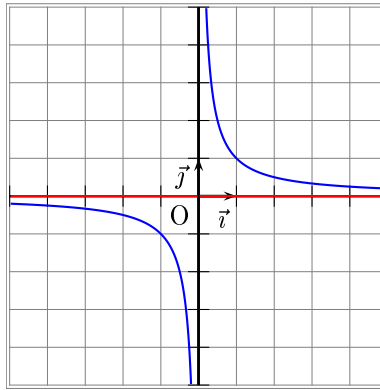
Définition : Soit f une fonction telle que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = l$.

La droite d'équation $y = l$ est **asymptote horizontale** à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $\pm\infty$.

Remarque : Le symbole $\pm$ signifie "plus ou moins". Ce que je veux dire en l'utilisant c'est que cela revient au même en $+\infty$ et en $-\infty$.

Exemple : La fonction inverse admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $\pm\infty$ car :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$



2 - ASYMPTOTE VERTICALE

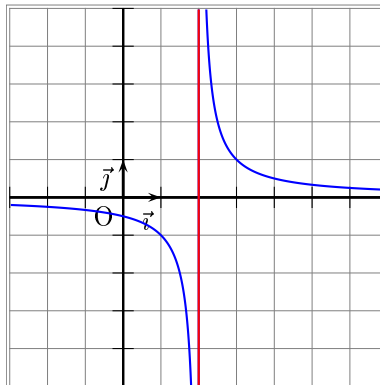
Puis la verticale.

Définition : Soit f une fonction telle que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$.
La droite d'équation $x = a$ est **asymptote verticale** à la courbe $\mathcal{C}_f$.

Remarque : On a une asymptote verticale lorsque la fonction admet une (ou plusieurs) valeurs interdites.

Exemple : La fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x-2}$ a pour valeur interdite 2. Donc cette fonction admet une asymptote verticale d'équation $x = 2$,

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$$



3 - ASYMPTOTE OBLIQUE

Enfin, un tout petit peu plus difficile (vraiment tout petit), l'asymptote oblique.

Définition : La droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = ax + b$ est **asymptote oblique** en $\pm\infty$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ d'équation $y = f(x)$ lorsque :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - (ax + b) = 0$$

Exemple : La fonction f définie par $f(x) = x - 3 + \frac{1}{x}$ admet une asymptote oblique d'équation $y = x - 3$.
En effet :

$$f(x) - (x - 3) = x - 3 + \frac{1}{x} - x + 3 = \frac{1}{x}$$

Or,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x - 3) = 0$$

On a donc le résultat voulu.

