

# DÉRIVATION

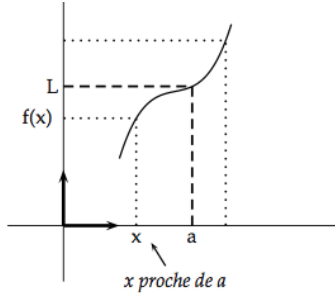
[www.mathsbook.fr](http://www.mathsbook.fr)

## I - LIMITE D'UNE FONCTION EN $a$

**Définition** : On dit que  $f$  tend vers  $L$  quand  $x$  tend vers  $a$  si la distance de  $f(x)$  à  $L$  peut être rendu aussi petite que l'on veut dès lors que  $x$  est suffisamment proche de  $a$ .

Ceci se note :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$



**Théorème** : Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I - \{a\}$  ( $I$  privée de  $a$ ) et  $g$  une fonction définie sur  $I$ . Si  $g$  admet une limite en  $a$  et si pour tout  $x \neq a$  on a  $f(x) = g(x)$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g(a)$ .

## II - DÉRIVÉE D'UNE FONCTION

### 1 - NOMBRE DÉRIVÉE D'UNE FONCTION EN $a$

**Définition** : Soit  $f$  une fonction définie en  $a$  et  $h \in \mathbb{R}$ .

La fonction  $f$  est **dérivable** en  $a$  s'il existe un nombre  $D$  appartenant à  $\mathbb{R}$  tel que :

$$D = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Ce nombre  $D$ , s'il existe, est appelé **nombre dérivé** de  $f$  en  $a$  et on le note :

$$D = f'(a)$$

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \stackrel{x=a+h}{=} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

### 2 - FONCTION DÉRIVÉE

**Définition** : Soit  $f$  une fonction dérivable et définie sur un intervalle  $I$ .

On appelle **fonction dérivée** la fonction qui à chaque réel  $x$  de  $I$  associe son nombre dérivée.

On la note  $f'$  :

$$f' : x \mapsto f'(x)$$

### 3 - DÉRIVÉES USUELLES

| Fonction                                            | Dérivée               |
|-----------------------------------------------------|-----------------------|
| $k$ ( $k \in \mathbb{R}$ )                          | 0                     |
| $x^n$ ( $n \in \mathbb{N}^*$ )                      | $nx^{n-1}$            |
| $\frac{1}{x}$ ( $x \neq 0$ )                        | $-\frac{1}{x^2}$      |
| $\frac{1}{x^n}$ ( $x \neq 0$ $n \in \mathbb{N}^*$ ) | $-\frac{n}{x^{n+1}}$  |
| $\sqrt{x}$ ( $x > 0$ )                              | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ |

## 4 - OPÉRATIONS SUR LES DÉRIVÉES

**Opérations sur les dérivées** : Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions dérivables et définies sur un même intervalle  $I$  et  $k$  un réel.

- $u + v$  est dérivable sur  $I$  et  $(u + v)'(x) = u'(x) + v'(x)$ ,
- $u \times v$  est dérivable sur  $I$  et  $(u \times v)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ ,
- $k \times u$  est dérivable sur  $I$  et  $(k \times u)'(x) = k \times u'(x)$ ,
- Si  $v$  ne s'annule pas sur  $I$ ,  $\frac{u}{v}$  est dérivable sur  $I$  et  $(\frac{u}{v})'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$ ,

## 5 - VARIATIONS

**Théorème** : Soit  $f$  une fonction dérivable et définie sur un intervalle  $I$ .

- Si  $f'(x) = 0$  pour tout  $x \in I$ , alors  $f$  est constante sur  $I$ ,
- Si  $f'(x) \geq 0$  pour tout  $x \in I$ , alors  $f$  est croissante sur  $I$ ,
- Si  $f'(x) > 0$  pour tout  $x \in I$ , alors  $f$  est strictement croissante sur  $I$ ,
- Si  $f'(x) \leq 0$  pour tout  $x \in I$ , alors  $f$  est décroissante sur  $I$ ,
- Si  $f'(x) < 0$  pour tout  $x \in I$ , alors  $f$  est strictement décroissante sur  $I$ .

## 6 - EXTREMUM

**Propriétés** :

- Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle ouvert  $I$ .  
Si  $f$  admet un extremum local en  $x_0$ , alors  $f'(x_0) = 0$ .
- Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle ouvert  $I$  et  $x_0 \in I$ .  
Si la fonction dérivée  $f'(x_0)$  s'annule en  $x_0$  en changeant de signe, alors  $f$  admet un extremum local en  $x_0$ .

## III - APPROXIMATION AFFINE ET TANGENTE À LA COURBE EN UN POINT

**Propriété** : Si  $f$  est dérivable en  $a$ , alors  $f(x) = (x - a)f'(a) + f(a) + (x - a)\epsilon(x)$  avec  $\lim_{x \rightarrow a} \epsilon(x) = 0$ .  
On appelle **approximation affine** de  $f : f(x) = (x - a)f'(a) + f(a)$

Le coefficient directeur de la droite tangente à la courbe au point  $M_0$  d'abscisse  $x_0$  est  $f'(x_0)$ .

**Définition** : L'équation de la droite tangente à la courbe au point  $M_0$  d'abscisse  $x_0$  est :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$