

FONCTION EXPONENTIELLE

www.mathsbook.fr

I - LES PUISSANCES

1 - DÉFINITION - NOTATION PUISSANCE

Définition : Soit $a > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

On a alors :

$$a^\alpha = e^{\alpha \ln a}$$

Pour tout réel strictement positif a , l'application $x \mapsto a^x$ est appelée **fonction exponentielle de base a** .

2 - PROPRIÉTÉS

Propriétés : Soient a et b deux réels non nuls et m et n deux entiers :

– $a^m \times a^n = a^{m+n}$;

– $(a^m)^n = a^{m \times n}$;

– $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$;

– $(ab)^n = a^n \times b^n$;

– $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

3 - ÉTUDE DE LA FONCTION $x \mapsto a^x$ AVEC $a > 0$

Soit $f(x) = a^x = e^{x \ln a}$.

f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composition de fonction dérivables.

$$f'(x) = (\ln a)e^{x \ln a} = a^x \ln a$$

Cas $a < 1$:

La dérivée $f'(x) = (\ln a)e^{x \ln a} = a^x \ln a < 0$.

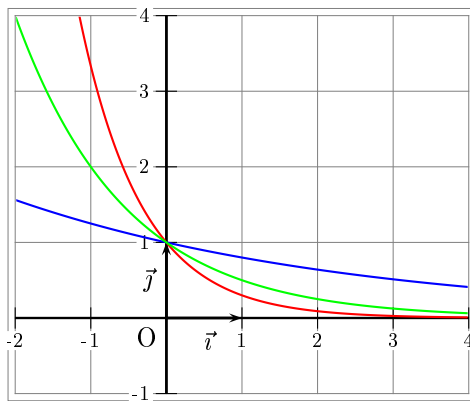
Calcul des limites :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

Son tableau de variations :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	–	
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$



Cas $a > 1$:

La dérivée $f'(x) = (\ln a)e^{x \ln a} = a^x \ln a > 0$.

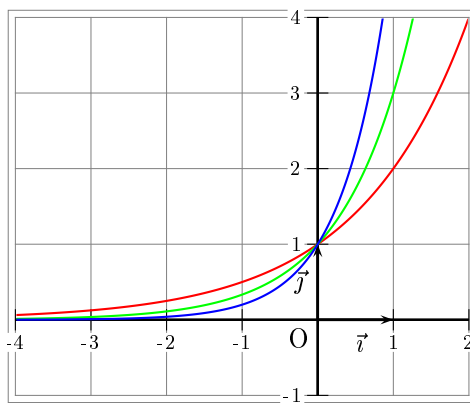
Calcul des limites :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

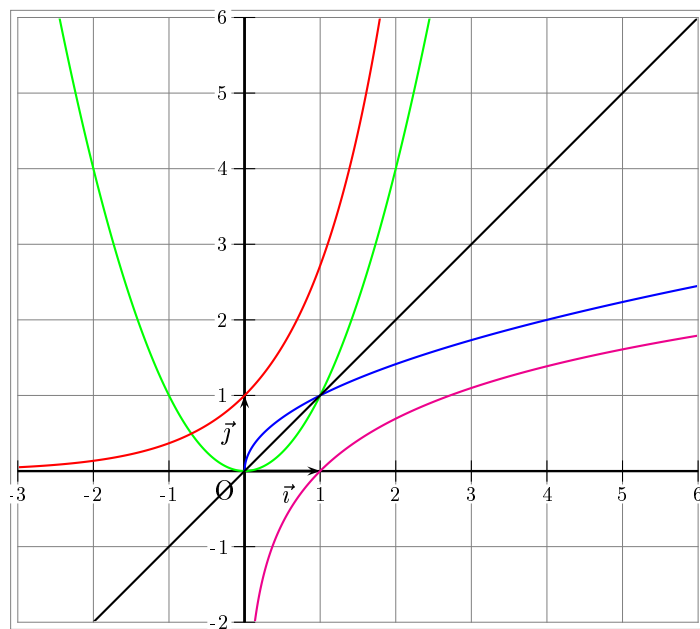
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Son tableau de variations :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0	$+\infty$



4 - CROISSANCE COMPARÉE



II - FONCTION EXPONENTIELLE

1 - DÉFINITION

Théorème : Si f est une fonction dérivable non nulle sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(x+y) = f(x) \times f(y)$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, alors $f(0) = 1$ et pour tout réel x , $f'(x) = kf(x)$ où $k = f'(0)$.

Définition : Il existe une unique fonction f dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. Cette fonction s'appelle la **fonction exponentielle**. On la note $f(x) = \exp(x) = e^x$.

Théorème : Soit $k \in \mathbb{R}$. Il existe une unique fonction f dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = kf$ et $f(0) = 1$. Cette fonction est e^{kx} .

2 - PROPRIÉTÉS

Propriétés : Voici un grand nombre de propriétés sur cette fonction logarithme.

- La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout réel x , $e^x > 0$.
- Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$,

$$e^a < e^b \implies a < b$$

$$e^a = e^b \implies a = b$$

- Pour tout $x > 0$, $e^{\ln x} = x$.
- Pour tout réel x , $\ln(e^x) = x$.
- La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , $(e^x)' = e^x$.
- Si u est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, alors :

$$(e^u)' = u' e^u$$

- Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$e^{x+y} = e^x e^y$$

- Pour tout réel x ,

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

- Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

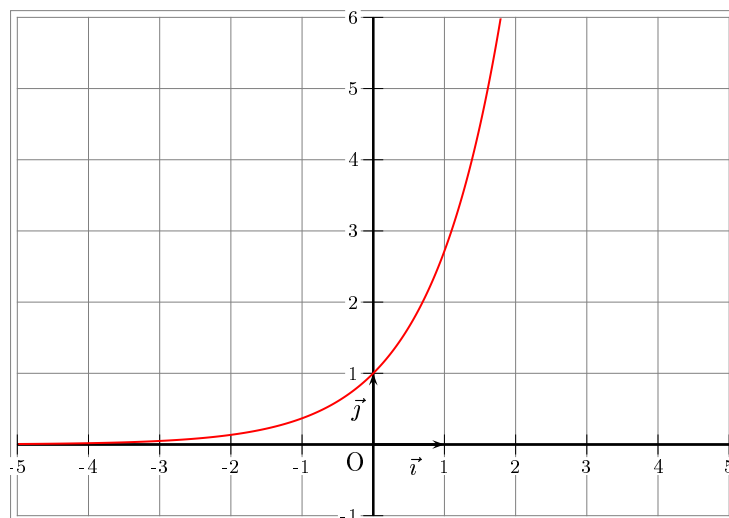
$$e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$$

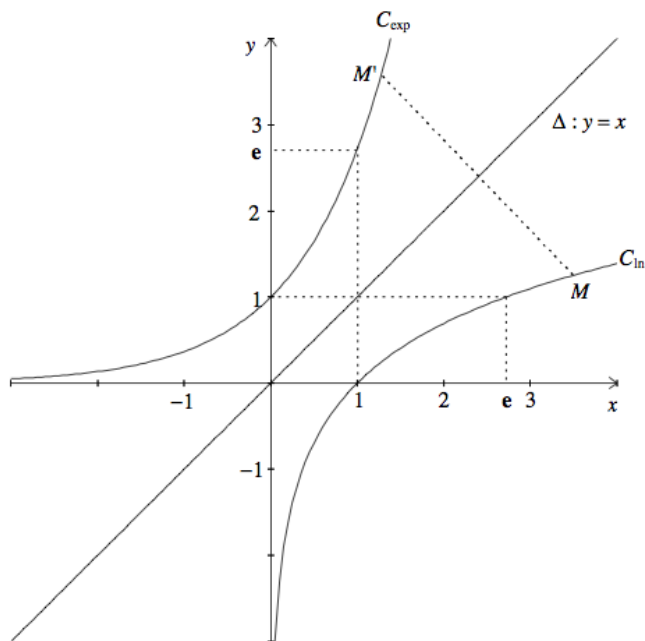
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(e^x)^n = e^{nx}$$

3 - TRACÉ DE LA FONCTION

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	0^+	$+\infty$





4 - ETUDE DES LIMITES

Propriétés :

—

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

—

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

—

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

—

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

—

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

—

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$$

—

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$