

FONCTION LOGARITHME

www.mathsbook.fr

I - DÉFINITION

Définition : Pour tout nombre $a > 0$, il existe un unique nombre réel α tel que $e^\alpha = a$.

Ce nombre est appelé **logarithme népérien** de a et est noté $\ln a$.

On appelle **fonction logarithme népérien**, la fonction qui à tout $x \in]0; +\infty[$ associe $\ln x$:

$$x \mapsto \ln x$$

On appelle **fonction logarithme décimale** la fonction $\log$ qui à tout $x \in]0; +\infty[$ associe $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$:

$$x \mapsto \log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

II - PROPRIÉTÉS

Propriétés : Voici un grand nombre de propriétés sur cette fonction logarithme.

– $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$.

– $\ln x$ est négatif sur $]0; 1]$ et positif sur $[1; +\infty[$.

– Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\ln x = \ln y \iff x = y$$

$$\ln x > \ln y \iff x > y$$

– La fonction logarithme est continue, donc dérivable, et strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

– Pour tout $x > 0$,

$$\ln' x = \frac{1}{x}$$

– Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur I , alors :

$$(\ln \circ u)' = \frac{u'}{u}$$

– Pour tout $x, y > 0$,

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y$$

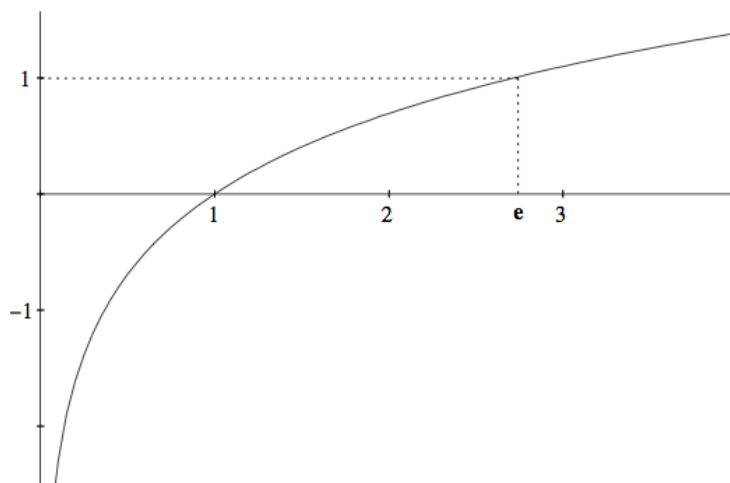
$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$$

– Pour tout a réel strictement positif et tout nombre rationnel r :

$$\ln a^r = r \ln a$$

III - TRACÉ DE LA FONCTION

x	0	1	$+\infty$
$f(x)$		0	



IV - ETUDE DES LIMITES

Propriétés :

—

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

—

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$$

—

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$$

—

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^n \ln x = 0$$

—

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

—

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$

—

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$