

CALCUL INTÉGRAL

www.mathsbook.fr

I - DÉFINITIONS

1 - INTÉGRALE

Définition : Soit f une fonction continue et positive. On considère la courbe $\mathcal{C}$ de f dans un repère. On appelle **intégrale de a à b** , l'aire du domaine situé sous la courbe, entre les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ et l'axe des abscisses.

On la note :

$$\int_a^b f(x)dx$$

2 - CONVENTION

Convention : Si f est continue et négative sur $[a; b]$, alors l'intégrale de a à b est égale à l'aire du domaine situé sous la courbe, entre les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ et l'axe des abscisses, auquel on affecte un signe moins. On parlera alors d'**aire algébrique**.

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$, alors l'intégrale de a à b est égale à la somme des aires algébriques définies sur les intervalles où $f(x)$ garde un signe constant.

3 - VALEUR MOYENNE D'UNE FONCTION

Définition : Soit f une fonction continue, définie sur un intervalle $[a; b]$.

La **valeur moyenne** de la fonction f sur $[a; b]$ est égale à :

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

II - PROPRIÉTÉS

Propriétés :

- Linéarité : ($\lambda \in \mathbb{R}$)

$$\int_a^b (f + g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$
$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$$

- Positivité : Si pour tout $x \in [a; b]$,

$$f(x) \leq 0 \implies \int_a^b f(x)dx \leq 0$$

$$f(x) \geq 0 \implies \int_a^b f(x)dx \geq 0$$

- Ordre : Si pour tout $x \in [a; b]$,

$$f(x) \leq g(x) \implies \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

- Relation de Chasles : Pour tout $x \in [a; b]$,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

- Inégalité de la moyenne : Soient m et M deux nombres réels tels que pour tout $x \in [a; b]$, $m \leq f(x) \leq M$, alors :

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M$$

III - APPLICATION

Aire du domaine compris entre deux courbes : Soient f et g deux fonctions continues et positives, de courbes représentatives respectives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ telles que $f(x) > g(x)$ (f au dessus de g). L'aire du domaine compris entre ces deux courbes, sur $[a; b]$, est :

$$\int_a^b (f - g)(x)dx$$

IV - INTÉGRALES ET PRIMITIVES

Théorème : Soient f une fonction continue sur un intervalle I , a et b deux réels de I et F une primitive de f sur I .
On a :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

V -INTÉGRATION PAR PARTIE

Théorème : Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et u' et v' leurs dérivées supposées continues. Alors, pour tout réels a et b de I :

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$$