

CONDITIONNEMENT ET INDÉPENDANCE

www.mathsbook.fr

I - RAPPELS DE PROBABILITÉS

1 - ENSEMBLES

Ensembles : Soit E un ensemble, A et B deux sous-ensembles de E .

- L'ensemble $A \cap B$ est l'ensemble des éléments de E commun à A et B .
- L'ensemble $A \cup B$ est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent soit à A soit à B .
- L'ensemble $\bar{A}$ est l'ensemble des éléments de E qui n'appartient pas à A .
- $Card(A)$ est le nombre d'éléments de A .

2 - VOCABULAIRE DE PROBABILITÉS

Vocabulaire des probabilités :

- **Expérience aléatoire ou éventualité** : Une expérience aléatoire ou éventualité est une expérience dont le résultat est l'effet du hasard.
- **Univers** : L'univers est l'ensemble que l'on note Ω de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire.
- **Événement** : Un événement est une partie de Ω .
- **Événement élémentaire** : Un événement élémentaire est un singleton de Ω .
- **Événement contraire** : Un événement contraire d'un événement A , noté $\bar{A}$, est la partie complémentaire de A dans Ω .
- **Événement incompatibles** : Deux événements A et B sont incompatibles si $A \cap B = \emptyset$.

3 - DÉFINITION DE LA PROBABILITÉ

Probabilité : Soit un univers Ω ayant n éléments : $\Omega = \{a_1; a_2; \dots; a_n\}$.

Définir une probabilité sur Ω c'est associer à chaque élément $\{a_i\}$ un réel positif p_i tels que leur somme vaut 1 :

$$\sum_{k=1}^n p_i = p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$

On dit alors que la **probabilité** de l'événement élémentaire a_i est p_i .

La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des événements élémentaires inclus dans A .

4 - PROPRIÉTÉS DES PROBABILITÉS

Propriétés des probabilités :

- La probabilité est un nombre compris entre 0 et 1.
- $p(\emptyset) = 0$.
- $p(\Omega) = 1$.
- $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$.
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

II - PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

1 - CONDITIONNEMENT

Conditionnement : Soient A et B deux événements, avec A de probabilité non nulle.

On définit la **probabilité de B sachant A** par :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

2 - INDÉPENDANCE

Indépendance : Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Théorème de l'indépendance : Soient A et B deux événements de probabilités non nulles.

On a alors :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \iff P_A(B) = P(B) \iff P_B(A) = P(A)$$

3 - FORMULE DES PROBABILITÉS TOTALES

Partition : Soit un ensemble E .

Les événements de probabilités non nulles $\{E_1; E_2; E_3; \dots; E_n\}$ forment une **partition** de E si et seulement si :

- $\forall i \in [1; n], E_i \in E$;
- Les événements $E_1, E_2, \dots, E_n$ sont deux à deux incompatibles,
- Leur réunion est égale à l'ensemble E .

Formule des probabilités totales : Soit $(A_1; A_2; \dots; A_n)$ une partition de Ω .

Alors, pour tout événement B de Ω , on aura :

$$P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \dots + P(A_n) \times P_{A_n}(B)$$

III - VARIABLES ALÉATOIRES

1 - DÉFINITION D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE

Variable aléatoire : Une **variable aléatoire** réelle est une fonction qui associe un réel à chaque événement de l'univers d'une expérience aléatoire.

2 - LOI DE PROBABILITÉ

Loi de probabilité : Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs :

$$X(\Omega) = x_1; x_2; \dots; x_n$$

La loi de probabilité de X associe à chaque réel x_i la probabilité $P(X = x_i)$.

3 - ESPÉRANCE

Espérance : L'espérance d'une variable aléatoire X est le réel :

$$E(X) = \sum_{i=0}^n x_i P(X = x_i)$$

Propriété de l'espérance : Pour tous réels a et b :

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

4 - VARIANCE

Variance : La variance d'une variable aléatoire X est le réel :

$$V(X) = \sum_{i=0}^n [x_i - E(X)]^2 P(X = x_i)$$

Propriété de la variance : Pour tous réels a et b :

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

5 - ÉCART-TYPE

Écart-type : L'écart-type d'une variable aléatoire X est le réel :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

IV - LOI DE BERNOUILLI

Loi de Bernoulli : Soit un réel p compris entre 0 et 1.

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire ne présentant que deux issues possibles :

- **succès**, de probabilité p ,
- **échec**, de probabilité $1 - p$,

Une variable aléatoire suit la **loi de Bernoulli de paramètre p** si :

- $X(\Omega) = \{0; 1\}$,
- $P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p$.

Théorème : Si X suit la loi de Bernoulli de paramètre p , on a alors :

- $E(X) = p$,
- $V(X) = p(1 - p)$,

V - LOI BINOMIALE

Loi binomiale : Soit un réel p compris entre 0 et 1 et n un entier naturel non nul.

Le **nombre de succès** dans la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes suit la loi binomiale de paramètres n et p .

Une variable aléatoire suit ainsi la **loi binomiale de paramètres n et p** , notée $B(n; p)$, si :

- $X(\Omega) = [0; n]$,
- $\forall k \in [0; n]$:

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Le nombre de possibilités de placer les k succès parmi les n répétitions est égal au coefficient :

$$\binom{n}{k}$$

Théorème : Si X suit la loi de binomiale de paramètres n et p , on a alors :

- $E(X) = np$,
- $V(X) = np(1-p)$,