

DÉRIVATION

www.mathsbook.fr

I - DÉRIVÉE D'UNE FONCTION

1 - NOMBRE DÉRIVÉE D'UNE FONCTION EN a

Définition : Soit f une fonction définie en a et $h \in \mathbb{R}$.

La fonction f est **dérivable** en a s'il existe un nombre D appartenant à $\mathbb{R}$ tel que :

$$D = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Ce nombre D , s'il existe, est appelé **nombre dérivé** de f en a et on le note :

$$D = f'(a)$$

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \stackrel{x=a+h}{=} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

2 - FONCTION DÉRIVÉE

Définition : Soit f une fonction dérivable et définie sur un intervalle I .

On appelle **fonction dérivée** la fonction qui à chaque réel x de I associe son nombre dérivée.

On la note f' :

$$f' : x \mapsto f'(x)$$

3 - DÉRIVÉES USUELLES

Fonction	Dérivée
k ($k \in \mathbb{R}$)	0
x^n ($n \in \mathbb{N}^*$)	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$ ($x \neq 0$)	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}$ ($x \neq 0$ $n \in \mathbb{N}^*$)	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$ ($x > 0$)	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

4 - OPÉRATIONS SUR LES DÉRIVÉES

Opérations sur les dérivées : Soient u et v deux fonctions dérivables et définies sur un même intervalle I et k un réel.

- $u + v$ est dérivable sur I et $(u + v)'(x) = u'(x) + v'(x)$,
- $u \times v$ est dérivable sur I et $(u \times v)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$,
- $k \times u$ est dérivable sur I et $(k \times u)'(x) = k \times u'(x)$,
- Si v ne s'annule pas sur I , $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et $(\frac{u}{v})'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$,

5 - VARIATIONS

Théorème : Soit f une fonction dérivable et définie sur un intervalle I .

- Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$, alors f est constante sur I ,
- Si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, alors f est croissante sur I ,
- Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$, alors f est strictement croissante sur I ,
- Si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$, alors f est décroissante sur I ,
- Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$, alors f est strictement décroissante sur I .

6 - EXTREMUM

Propriétés :

- Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I .
Si f admet un extremum local en x_0 , alors $f'(x_0) = 0$.
- Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$.
Si la fonction dérivée $f'(x_0)$ s'annule en x_0 en changeant de signe, alors f admet un extremum local en x_0 .

II - DÉRIVATION D'UNE FONCTION COMPOSÉE

Définition : Soient f une fonction définie sur I et $g(x)$ une fonction définie sur $f(I)$.

La fonction $g \circ f$ (on dit " g rond f ") est la fonction définie aussi sur le domaine I par :

$$g \circ f(x) = g[f(x)]$$

Théorème : Soient f une fonction définie sur I et $g(x)$ une fonction définie sur $f(I)$.

On a la formule suivante :

$$g \circ f = g'(x) \times f'[g(x)]$$

III - APPROXIMATION AFFINE ET TANGENTE À LA COURBE EN UN POINT

Propriété : Si f est dérivable en a , alors $f(x) = (x - a)f'(a) + f(a) + (x - a)\epsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow a} \epsilon(x) = 0$.

On appelle **approximation affine** de f : $f(x) = (x - a)f'(a) + f(a)$

Le coefficient directeur de la droite tangente à la courbe au point M_0 d'abscisse x_0 est $f'(x_0)$.

Définition : L'équation de la droite tangente à la courbe au point M_0 d'abscisse x_0 est :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$