

SUITES NUMÉRIQUES

www.mathsbook.fr

I - DÉFINITION SUITE NUMÉRIQUE

Définition : Soient $a \in \mathbb{N}$ et $I_a = \{n \in \mathbb{N}, n \geq a\}$, I_a est en fait l'ensemble des entiers naturels à partir de a .
On appelle **suite numérique** la fonction u de I_a dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} I_a & \rightarrow \mathbb{R} \\ n & \mapsto u(n) \end{cases}$$

Notation : On notera $u(0)$ u_0 , $u(1)$ u_1 , etc.
 u_n s'appelle **terme** de la suite numérique.

II - MODES DE DÉFINITIONS D'UNE SUITE NUMÉRIQUE

1 - MODE EXPLICITE

Mode explicite : Le terme général de la suite est exprimé en fonction de n :

$$u_n = f(n)$$

2 - MODE RÉCURRENT

Mode récurrent : Une suite numérique est définie par la donnée de son premier terme et d'un procédé qui permet de déterminer les suivants.

$$\begin{cases} u_{n+1} & = f(u_n) \\ u_0 & \end{cases}$$

III - SUITE ARITHMÉTIQUE

Définition : On appelle **suite arithmétique** de premier terme u_0 et de **raison** r la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} & = u_n + r \\ u_0 & \end{cases}$$

Propriétés :

– Si u est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r , alors :

$$u_n = u_0 + nr$$

– Si u est une suite arithmétique, alors pour tout $n \geq p$,

$$u_n = u_p + (n - p)r$$

Propriété : Soit u une suite arithmétique.

La somme des termes de cette suite est donnée par :

$$\sum_{n=0}^n u_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$$

IV - SUITE GÉOMÉTRIQUE

Définition : On appelle **suite géométrique** de premier terme u_0 et de **raison** q la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= & qu_n \\ u_0 && \end{cases}$$

Propriétés :

- Si u est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q , alors :

$$u_n = u_0 q^n$$

- Si u est une suite géométrique, alors pour tout $n \geq p$,

$$u_n = u_p q^{n-p}$$

Propriété : Soit u une suite géométrique.

La somme des termes de cette suite est donnée par :

$$\sum_{n=0}^n u_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

V - PROPRIÉTÉS D'UNE SUITE

1 - VARIATIONS

Définitions : Soit u_n une suite numérique.

- La suite (u_n) est dite **croissante** si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$$

- La suite (u_n) est dite **strictement croissante** si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n < u_{n+1}$$

- La suite (u_n) est dite **décroissante** si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_{n+1}$$

- La suite (u_n) est dite **strictement décroissante** si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n > u_{n+1}$$

- La suite (u_n) est dite **stationnaire** si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n$$

2 - EXTREMUM

Définitions : Soit u_n une suite numérique.

- La suite (u_n) est **majorée** si :

$$\exists M \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$$

M est appelé le **majorant**.

- La suite (u_n) est **minorée** si :

$$\exists m \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$$

m est appelé le **minorant**.

- Une suite qui est à la fois majorée et minorée est dite **bornée**.

3 - THÉORÈMES

Théorèmes : Trois théorèmes.

- Toute suite croissante et majorée converge.
- Toute suite décroissante et minorée converge.
- Soit u_n une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$.
Alors, si u_n converge vers la limite l et si f est continue, alors l est solution de l'équation $l = f(l)$.

VI - SUITES ADJACENTES

Définition : Deux suites (u_n) et (v_n) sont **adjacentes** si l'une est croissante et l'autre décroissante et si :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$$

Définition : Si deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, avec u_n croissante et v_n décroissante, alors :

- Pour tout n , $u_n \leq v_n$,
- Les deux suites convergent et ont la même limite L ,
- Pour tout n , $u_n \leq L \leq v_n$.

VII - RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE

Définition : Considérons une proposition dépendant d'un entier naturel n , que l'on nomme $P(n)$.

Le raisonnement par récurrence permet de démontrer que $P(n)$ est vraie en trois étapes :

- Étape 1 : On vérifie que la proposition est vraie pour un entier n_0 .
- Étape 2 : On suppose que la proposition est vraie à un rang $n > n_0$ et on démontre qu'elle est vraie au rang $n + 1$, le rang suivant. Si c'est le cas, on dit que $P(n)$ est héréditaire.
- Étape 3 : On conclue que la proposition est vraie pour tout n .